

TEMA 3. Campos variables con el tiempo

1. Ley de Faraday de la inducción electromagnética

El postulado fundamental de la inducción electromagnética:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

Si integramos la ecuación anterior sobre una superficie s y aplicamos el teorema de Stokes, se obtiene:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (1.2)$$

Donde hemos supuesto que la superficie abierta s está limitada por el contorno c . La ecuación anterior es válida exista o no un circuito físico alrededor de c .

1.1. Circuito estacionario en un campo magnético variable con el tiempo

En el caso particular de que tengamos un circuito estacionario con un contorno c y superficie s :

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (1.3)$$

Si definimos:

$$\varepsilon = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} \equiv \text{fuerza electromotriz inducida} \\ \text{en el circuito con contorno } c \quad (V) \quad (1.4)$$

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \equiv \text{flujo magnético que atraviesa la superficie } s \quad (\text{Wb})$$

La ecuación anterior se convierte en:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (V) \quad (1.5)$$

El signo negativo afirma que la fuerza electromotriz inducida hará que fluya una corriente en el circuito cerrado tal que se oponga al cambio del flujo magnético que es lo que se conoce como ley de Lenz.

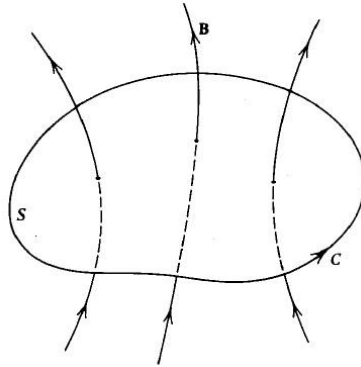


Figura 1. Flujo que atraviesa un circuito.

El flujo a través del circuito de la figura es positivo. Por lo tanto, todo flujo que presente un sentido contrario a la dirección de las líneas de flujo de la figura, se considerará como flujo negativo.

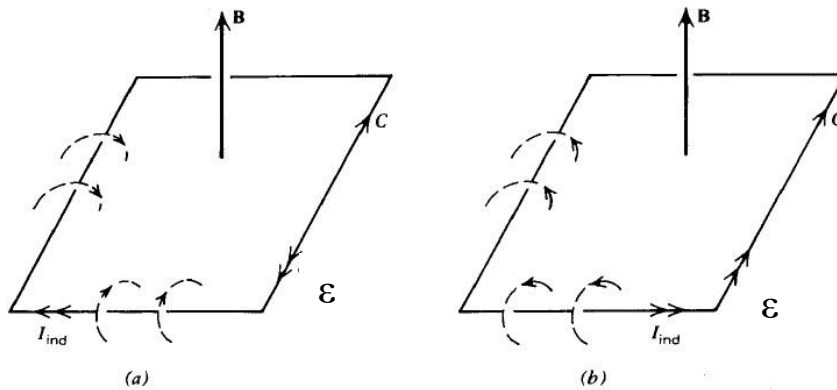


Figura 2. Discusión sobre el signo de la fuerza electromotriz.

En la figura superior se puede apreciar la dirección de la corriente inducida cuando la magnitud de B (a) aumenta y (b) disminuye

En el primero de los casos la fuerza electromotriz (ϵ) tendrá signo negativo, mientras que en (b) dicha fuerza electromotriz será positiva.

1.2. Circuito móvil en un campo magnético variable con el tiempo

Cuando una carga q se mueve con velocidad \vec{v} en una región donde existe tanto un campo \vec{E} como un campo \vec{B} , la fuerza electromagnética \vec{F} sobre q , según lo medido por un observador de laboratorio, está dada por la ecuación de la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.6)$$

Para un observador que se mueve con q no hay movimiento aparente y la fuerza sobre q puede interpretarse como debida a un campo eléctrico \vec{E}' , donde:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \\ &0 \\ \vec{E} &= \vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}\end{aligned}\tag{1.7}$$

Por consiguiente, cuando un circuito conductor con contorno c y superficie s se mueve con velocidad \vec{v} en un campo (\vec{E}, \vec{B}) , usamos la ecuación (1.7) en la ecuación (1.2) para obtener:

$$\oint_c \vec{E}' \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \oint_c (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (V) \tag{1.8}$$

La ecuación (1.8) es la forma general de la ley de Faraday para un circuito móvil en un campo magnético variable con el tiempo. La integral de línea en el miembro izquierdo de la ecuación es la fuerza electromotriz inducida en el marco de referencia móvil. El primer término del miembro derecho representa la fuerza electromotriz “estática” debido a la variación temporal de \vec{B} , y el segundo término representa la fuerza electromotriz “cinética” debida al movimiento del circuito en \vec{B} .

Si designamos el lado izquierdo de la ecuación (1.8) con:

$$\varepsilon' = \oint_c \vec{E}' \cdot d\vec{l} \equiv \text{fuerza electromotriz inducida en el circuito } c \tag{1.9}$$

medida en el marco móvil

puede demostrarse que, en términos generales, la ecuación (1.8) es equivalente a:

$$\varepsilon' = - \frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (V) \tag{1.10}$$

que tiene la misma forma que la ecuación (1.5). Por supuesto, ε' se reduce a ε si el circuito no está en movimiento. Por consiguiente, la ley de Faraday, que establece que la fuerza electromotriz inducida en un circuito cerrado es igual a la razón temporal negativa de incremento de flujo magnético ligado al circuito es aplicable, tanto a circuitos estacionarios como móviles. Podemos usar la ecuación (1.8) o la (1.10) para calcular la fuerza electromotriz inducida en el caso general.

1.3. Barra conductora en movimiento en presencia de un campo B perpendicular uniforme

Considérese una barra conductora de longitud l moviéndose a una velocidad constante perpendicular a la barra y perpendicular a un campo constante B , como se muestra en la Fig. 3.

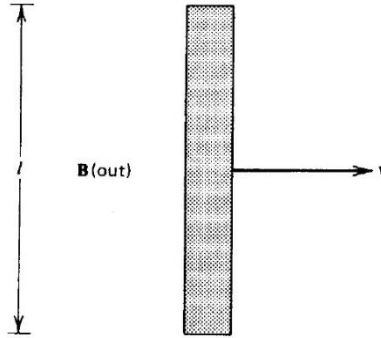


Figura 3. Barra conductora en movimiento que no forma parte de un circuito.

En este caso, como no se trata de un circuito cerrado, no puede circular ninguna corriente inducida. Por lo tanto, en un estado estacionario, este sistema vendrá determinado por una barra en la que no circulan corrientes inducidas ($\vec{J}' = 0$), lo que representa un campo $\vec{E}' = 0$, teniendo en cuenta la relación ($\vec{J}' = \sigma \vec{E}'$) donde σ es la conductividad.

Tras igualar las fuerzas del caso estacionario con el caso en movimiento, tenemos que

$$\vec{F}' = \vec{F} \rightarrow \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (1.11)$$

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.12)$$

Con lo cual, el observador estacionario verá un campo eléctrico de magnitud $E = Bv$ dirigido hacia arriba a lo largo de la barra, como muestra la siguiente figura:

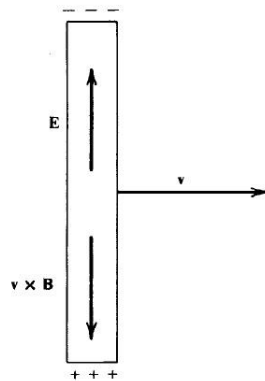


Figura 4. Situación vista por un observador estacionario.

Como estamos ante un campo homogéneo, la única manera de explicar desde donde se generaría este campo eléctrico sería desde las cargas superficiales generadas en los extremos de la barra, cuyos signos vendrían especificados en la Fig. 4.

Más allá de esto, se puede concluir por tanto que existe una diferencia de potencial entre los extremos de la barra. Esta diferencia de potencial vendría expresada como

$$\Delta\phi = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{l} = El = Blv \quad (1.13)$$

Durante las primeras fases del movimiento, las cargas móviles del conductor se sometieron a la fuerza magnética $q\vec{v} \times \vec{B}$ que viene dirigida hacia abajo, a lo largo de la barra. Esto producirá una separación de las cargas: las positivas se moverán hacia el extremo inferior de la barra, mientras que las negativas se moverán hacia el extremo superior. Pero estas cargas separadas producirán un campo eléctrico direccionado hacia la parte superior que tenderá a aminorar la fuerza total que ve una carga en el interior.

Finalmente, suficientes cargas serán separadas como para generar un campo \vec{E} que produzca una fuerza hacia arriba que contrarreste a la fuerza magnética. Este sería el equilibrio modelado por la ecuación (1.11).

Ahora, el número de cargas en los extremos será el mismo para ambos observadores, ya que el contaje de cargas es similar entre ambos. Por consiguiente el observador móvil verá la misma distribución de cargas en los extremos anteriormente descrita. Pero debido a que $\vec{E}' = 0$ en este sistema, la barra será vista como un volumen equipotencial y por lo tanto la diferencia de potencial entre extremos será $\Delta\phi' = 0$, en contraste con la fórmula descrita en (1.13), y en consonancia con el requisito de que este sistema no presente una corriente. Sin embargo, estas cargas superficiales producirán un campo eléctrico $\vec{E}' \neq 0$ en toda la región exterior de la barra, con lo que el escenario final será cualitativamente como viene descrito en la siguiente figura:

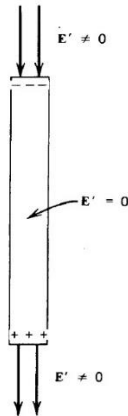


Figura 5. Situación vista por un observador en movimiento con la barra.

Los valores de \vec{E}' en la superficie pueden encontrarse en términos de la densidad superficial de carga. Con lo cual, este ejemplo nos muestra cómo diferentes observadores no necesariamente describen una cierta situación física exactamente del mismo modo cuando se plantea en términos de los campos, ya que sus descripciones relativas dependerán de su movimiento relativo. Esto es, las cosas se verían de modo diverso a

nivel de campos desde un sistema móvil en comparación a cómo serían vistas desde la perspectiva de un sistema fijo.

1.4. Generador homopolar de Faraday

Considérese un **disco circular plano conductor de radio a** en rotación con una velocidad angular de ω in un campo \vec{B} uniforme que es perpendicular al plano del disco. Esto se muestra en la Fig. 6, donde tanto \vec{B} como ω han sido elegidos para estar dentro del papel. Hay contactos deslizantes tanto en el eje central del disco como en el punto P en el borde del disco. El circuito se completa con cables y resistencia R .

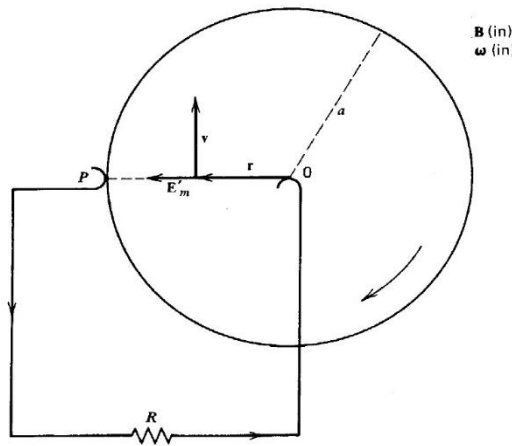


Figura 6. Generador homopolar.

En el punto con vector de posición \vec{r} con respecto al origen, la velocidad será $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ y esta será tangencial, como se puede observar en la figura. Por lo tanto, habrá un campo eléctrico en movimiento dado por

$$\varepsilon'_m = \oint_C \vec{E}'_m \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}, \quad (1.14)$$

$$\vec{E}'_m = \vec{v} \times \vec{B}. \quad (1.15)$$

Valiéndonos de una notación en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , tendremos que:

$$\vec{\omega} = -\omega \hat{z}$$

$$\vec{B} = -B \hat{z}$$

$$\vec{r} = r \hat{r},$$

con lo que podemos determinar

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = -\omega r (\hat{z} \times \hat{r}) = -\omega r \hat{\phi}.$$

De este modo, la expresión del campo eléctrico vendría dada por

$$\vec{E}'_m = \vec{v} \times \vec{B} = \omega r B (\hat{\phi} \times \hat{z}) = \omega B r \hat{r}. \quad (1.16)$$

Esta expresión, por tanto, nos está diciendo que el campo tiene dirección radial con sentido positivo, es decir, se desplaza hacia fuera del círculo. Si introducimos esta expresión en la ecuación (1.14), vemos que solamente la parte del disco entre 0 y P (Fig. 5) contribuirá a la fuerza electromotriz y ya que $d\vec{l} = d\vec{r}$, su expresión vendrá dada por

$$\varepsilon'_m = \int_0^P \vec{E}'_m \cdot d\vec{l} = \int_0^a \omega B r \cdot dr = \frac{1}{2} \omega B a^2. \quad (1.17)$$

La corriente resultante en el circuito externo tendrá la dirección que corresponderá con el sentido general de \vec{E}'_m . Aunque montajes como este pueden ser construidos y operar, generalmente no resultan prácticos debido al gran tamaño y altas velocidades de rotación que se hacen necesarios para obtener un valor razonable de la fuerza electromotriz. Si, en lugar de esta disposición, una fuerza electromotriz externa, tal como podría suponer una batería, se utiliza para producir una corriente por medio del sistema y utilizando sus contactos, entonces este disco rotará, dando lugar así al llamado *motor homopolar*.

2. Inductancias e inductores

Consideremos dos espiras cerradas cercanas c_1 y c_2 que limitan las superficies abiertas s_1 y s_2 . Si fluye una corriente I_1 en c_1 se creará una inducción magnética \vec{B}_1 . Parte de las líneas de campo de \vec{B}_1 pasarán a través de la superficie s_2 limitada por c_2 .

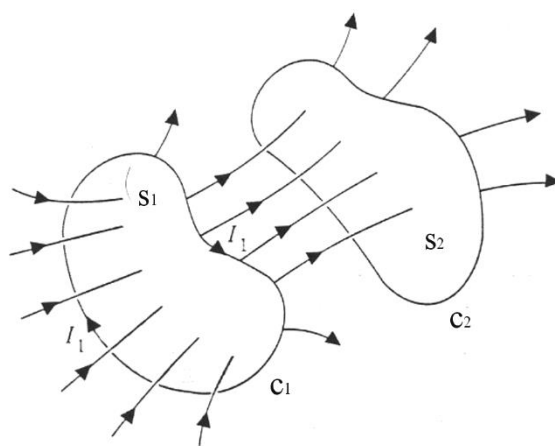


Figura 7. Líneas de flujo que atraviesan dos espiras cerradas cercanas c_1 y c_2 que limitan las superficies abiertas s_1 y s_2 .

$$\phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_2 \quad (\text{Wb}) \quad (2.1)$$

Se puede calcular ϕ_{12} a partir del potencial vector \vec{A}_1 producido por I_1 ,

$$\begin{aligned} \phi_{12} &= \int_{S_2} (\nabla \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{s}_2 = \oint_2 \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \oint_2 \left(\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_1 \frac{d\vec{l}_1}{r} \right) \cdot d\vec{l}_2 \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r} = M_{21} I_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r} \quad (2.3)$$

Es el coeficiente de inducción mutua entre los dos circuitos. La expresión (2.3) es la *ecuación de Neumann*.

De forma análoga, el flujo ϕ_{21} en el circuito 1, es:

$$\phi_{21} = M_{12} I_2 \quad (2.4)$$

Por ser la ecuación de Neumann simétrica respecto a sus subíndices 1 y 2, se verifica que:

$$M_{12} = M_{21} \quad (2.5)$$

Si c_2 tiene N_2 vueltas:

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= N_2 \phi_{12} = M_{21} I_1 \quad (\text{Wb}) \\ M_{21} &= \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{N_2}{I_1} \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_2 \quad (H) \end{aligned} \quad (2.6)$$

En la ecuación anterior está implícito el hecho de que la permeabilidad del medio no cambia con I_1 , es decir que esta ecuación sólo es válida para medios lineales.

La autoinductancia del circuito c_1 se define como el flujo magnético por unidad de corriente en el propio circuito:

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= N_1 \phi_{11} \\ L_1 &= M_{11} = \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \frac{N_1}{I_1} \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_1 \quad (H) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para un medio lineal la autoinductancia de una espira o de un circuito depende de la forma geométrica y la disposición física del conductor que constituye la espira o el circuito, así como de la permeabilidad del medio. En el caso de un medio lineal, la autoinductancia no depende de la corriente en la espira o el circuito.

Un conductor dispuesto en la forma adecuada (como un hilo conductor enrollado formando una bobina) se conoce como inductor. Así como un condensador almacena energía eléctrica un inductor puede almacenar energía magnética.

3. Energía magnética

Considérese una espira cerrada con autoinductancia L_1 en la cual la corriente inicialmente es cero. Se conecta a la espira un generador de corriente que aumenta la corriente i_1 de cero a I_1 . En un circuito filiforme i , el trabajo realizado para mover la carga dq es,

$$V_i dq = V_i i_i dt \quad (3.1)$$

En el intervalo de tiempo dt , la energía suministrada por las baterías será,

$$dW_i = V_i i_i dt \quad (3.2)$$

Si se trata de un circuito de resistencia R ,

$$V_i + \varepsilon_i = R i_i \quad (3.3)$$

Es decir, la f.e.m. de la batería más la inducida ε_i , es igual a $R i_i$. Despejando V_i y llevándola a la ecuación de la energía queda,

$$dW_i = -\varepsilon_i i_i dt + R i_i^2 dt \quad (3.4)$$

El término $R i_i^2 dt$ representa la energía disipada por efecto Joule y no forma parte del trabajo reversible. Por tanto si tenemos en cuenta la relación $\varepsilon_i = -d\Phi_i/dt$, la energía magnética elemental dW_{mi} será,

$$dW_{mi} = i_i d\Phi_i \quad (3.5)$$

En un sistema de N circuitos,

$$dW_{mi} = \sum_{i=1}^N i_i d\Phi_i \quad (3.6)$$

Como el flujo sobre el circuito i depende del propio circuito y todos los demás, el citado flujo en función de los coeficientes de inducción mutua y autoinducción será,

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} di_j \quad (3.7)$$

Sustituyendo la ecuación (3.7) en (3.6), y considerando que la energía en el estado final no depende de los estados intermedios, podemos poner $i_i = \alpha I_i$, $di_i = I_i d\alpha$ y

$d\Phi_i = \Phi_i d\alpha$ e integrar con respecto a α entre 0 y 1. El resultado es la siguiente fórmula para la energía:

$$\begin{aligned}
 W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} I_i I_j &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \cdots + \frac{1}{2} L_n I_n^2 \\
 &+ M_{12} I_1 I_2 + M_{13} I_1 I_3 + \cdots + M_{1n} I_1 I_n \\
 &+ M_{23} I_2 I_3 + \cdots + M_{n-1n} I_{n-1} I_n
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Donde se ha utilizado que $M_{ii} = L_i$ y que $M_{ij} = M_{ji}$.

Para dos circuitos acoplados, la última ecuación se reduce a

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \tag{3.9}$$

que para un solo circuito se reduce a:

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \tag{3.10}$$

Por otro lado, en función de las corrientes y flujos, la energía viene dada por:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i \tag{3.11}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\sum_{j=1}^M M_{ij} I_j = \Phi_i$ en la ecuación (3.8).

En el circuito i se verifica que:

$$\Phi_i = \oint_{C_i} \vec{A}_i \cdot d\vec{l}_i \tag{3.12}$$

Por otra parte la corriente I_i se puede considerar como originada por una distribución de corriente cuya densidad es \vec{J}_i ,

$$I_i = \int \vec{J}_i \cdot d\vec{s}_i \tag{3.13}$$

El sumatorio de la ecuación (3.11) de términos infinitesimales se transforma en \int y $d\vec{s}_i \cdot d\vec{l}_i = dv$, de forma que,

$$\sum \oint \rightarrow \int_V$$

En consecuencia,

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{j} \cdot \vec{A} dv \quad (3.14)$$

4. Energía magnética en términos de cantidades de campo

Basándonos en el estudio que hemos realizado hasta ahora, se observan las siguientes analogías entre las magnitudes en la electrostática y aquellas en la magnetostática:

Electrostática	Magnetostática
\vec{E}	\vec{B}
\vec{D}	\vec{H}
ϵ	$\frac{1}{\mu}$

Por lo tanto, se puede expresar la energía magnética W_m en un medio lineal en términos de \vec{B} y \vec{H} , usando la expresión de la energía electrostática y la analogía anterior. De esta manera,

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V'} \vec{H} \cdot \vec{B} dv' \quad (J) \quad \left(W_e = \frac{1}{2} \int_{V'} \vec{D} \cdot \vec{E} dv' \right) \quad (4.1)$$

Si se utiliza la relación constitutiva $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ de un medio lineal, podemos expresar:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V'} \frac{\vec{B}^2}{\mu} dv' \quad (J) \quad (4.2)$$

Si se define una densidad de energía magnética, w_m , tal que su integral de volumen sea igual a la energía magnética total:

$$W_m = \int_{V'} w_m dv' \quad (4.3)$$

donde V' representa todo el espacio.

Se puede expresar w_m como:

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (J/m^3) \quad (4.4)$$

o,

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} \quad (\text{J/m}^3) \quad (4.5)$$

$$w_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} \, dv - \frac{1}{2} \oint_S (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \quad (4.6)$$

$$A \propto \frac{1}{r}, \quad H \propto \frac{1}{r^2}, \quad ds \propto r^2 \quad (4.7)$$

Es interesante aclarar que si s se encuentra muy alejado de los circuitos, la integral de superficie se anula.

Si se usa la ecuación (3.10) junto con la ecuación (4.1) o la ecuación (4.2), es posible determinar la autoinductancia de manera más sencilla a partir de la energía magnética almacenada, calculada en términos de \vec{B} o \vec{H} , en lugar de usar el flujo ligado:

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \quad (H) \quad (4.8)$$

5. Energía disipada en un ciclo de Histéresis

Para recorrer un ciclo de histéresis se necesita una energía, como se puede demostrar considerando la Fig. 8 (anillo de Rowland).

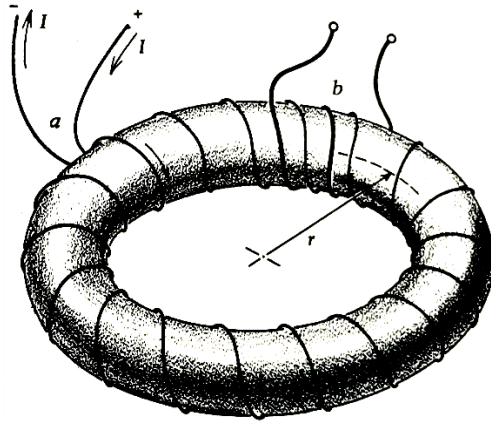


Figura 8. Representación gráfica de un anillo de Rowland.

Al aumentar la corriente, la fuerza electromotriz inducida en el devanado se opone al incremento de corriente, según la ley de Lenz, y la potencia extra que la fuente suministra es:

$$\frac{dW}{dt} = I \left(N \frac{d\Phi}{dt} \right) = INS \frac{dB}{dt} \quad (5.1)$$

donde S es el área transversal del anillo, N es el número de vueltas y B es la inducción magnética media en el núcleo. También,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{INSl}{l} \frac{dB}{dt} = H\tau \frac{dB}{dt}, \quad (5.2)$$

donde l es la circunferencia media del anillo y $\tau = Sl$ su volumen y $H=NI/l$. Por tanto,

$$W_1 = \tau \int_g^b HdB \quad (5.3)$$

es la energía que suministra la fuente para ir desde el punto g al punto b en la figura. Esta integral corresponde al área sombreada que se indica en la figura y es igual a la energía que se suministra por unidad de volumen del núcleo magnético.

Cuando la corriente tiene el mismo sentido pero disminuye, se invierte la polaridad de la fuerza electromotriz inducida, según la ley de Lenz, con el resultado de que cede a la fuente la energía

$$W_2 = \tau \int_b^c HdB. \quad (5.4)$$

Finalmente, la energía neta suministrada por la fuente durante un ciclo es:

$$W = \tau \oint_C HdB, \quad (5.5)$$

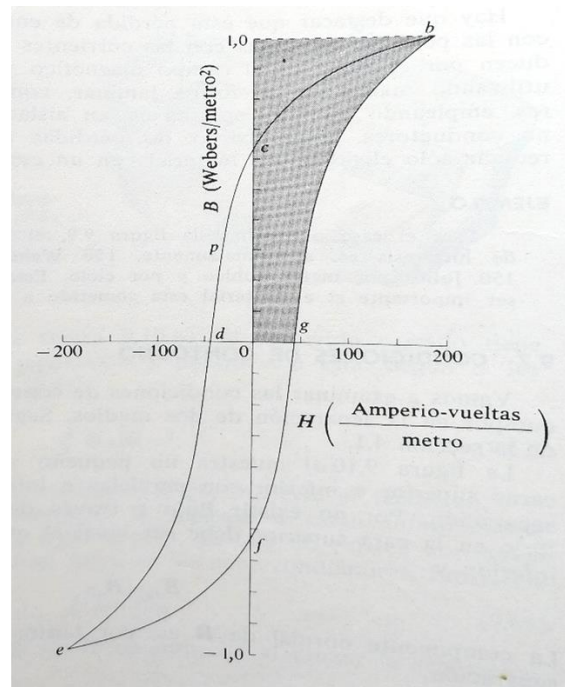


Figura 9. El área sombreada representa la energía requerida, por unidad de volumen, para ir desde g hasta b en el ciclo de histéresis. La energía requerida, por unidad de volumen, para describir el ciclo de histéresis completo es igual al área encerrada por el ciclo.

Donde la integral se extiende al ciclo de histéresis. El área limitada por el ciclo de histéresis en Weber-Amperio-vueltas/metro³ es, por tanto, el número de Julios que se disipan en el núcleo por metro cúbico y por ciclo.

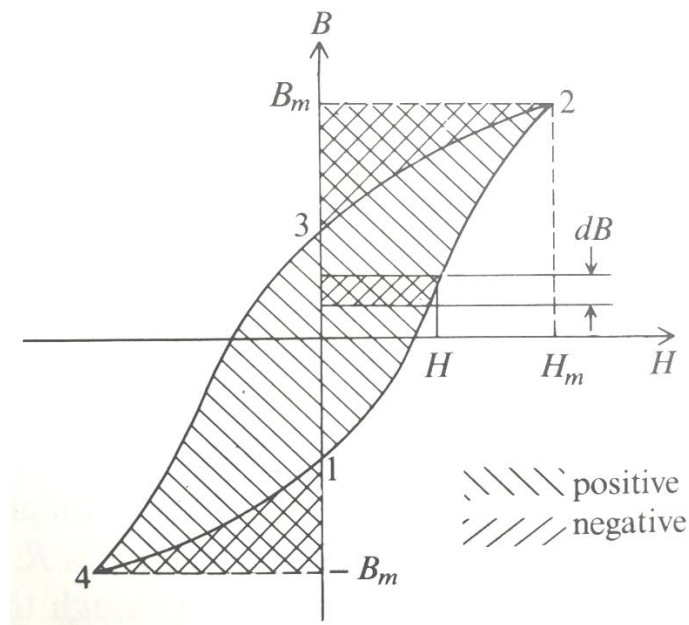


Figura 10. Representación gráfica de un ciclo de histéresis.

Comenzando desde el punto 1, podemos notar como, del punto 1 al 2, ambos H y el incremento dB de B son positivos. El trabajo realizado en cambiar de estado de la magnetización desde el punto 1 al punto 2 es por lo tanto también positivo, y viene dado por el área entre la parte 12 del ciclo de histéresis y el eje B . Desde el punto 2 hasta el punto 3, la intensidad de campo magnético H es de nuevo positiva, pero el incremento dB de B es –en este caso– negativo (ya que desde el punto 2 al punto 3 la densidad de flujo disminuye). El trabajo realizado en cambiar el estado de magnetización entre el punto 2 y 3 también será, consecuentemente, negativo. Esto significa que la energía por unidad de volumen (representada por la Fig. 9 mediante la superficie sombreada 23 B_m 2) regresa a sus fuentes. Desde el punto 3 al punto 4, ambos H y dB son negativos, por lo tanto, el trabajo realizado es positivo. Desde el punto 4 al punto 1, H es negativo y dB positivo, con lo que de nuevo la energía por unidad de volumen, representada por el área 41(- B_m)4 es negativa, esto es regresa a sus fuentes.

6. Transformadores

Un transformador es un dispositivo de corriente alterna (CA) que transforma voltajes, corrientes e impedancias. Normalmente consiste en dos o más bobinas acopladas

magnéticamente a través de un núcleo ferromagnético común, como se ilustra en la Fig. 11.

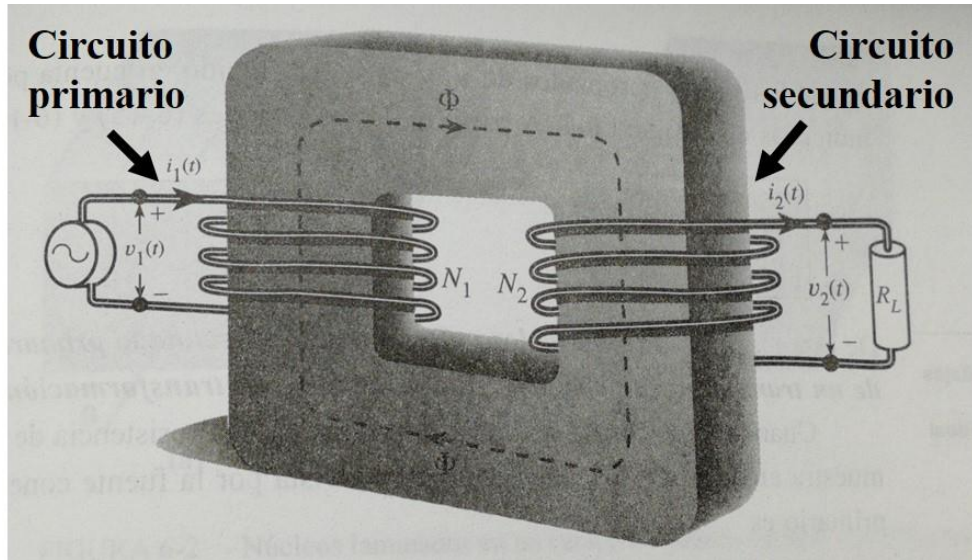


Figura 11. Diagrama esquemático de un transformador.

Para la trayectoria cerrada en el circuito magnético trazado por el flujo magnético Φ tenemos que:

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = \mathcal{R} \Phi \quad (6.1)$$

donde N_1, N_2 e i_1, i_2 son el número de vueltas y la corriente en los circuitos primario y secundario, respectivamente. El lado izquierdo de la ecuación (6.1) es la integral de línea cerrada $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$ alrededor del núcleo del transformador, consecuencia de la *Ley Circuital de Ampère*. De acuerdo con la ley de Lenz, la fuerza magnetomotriz inducida en el circuito secundario, $N_2 i_2$, se opone al flujo magnético creado por la fuerza magnetomotriz en el circuito primario, $N_1 i_1$. El símbolo \mathcal{R} en el lado derecho de (6.1), denota la reluctancia del circuito magnético, la cual depende de la geometría y es inversamente proporcional a la permeabilidad del material del núcleo. La ecuación (6.1) para un circuito magnético es análoga a la expresión de la ley de voltaje de Kirchhoff para un circuito eléctrico de corriente continua, y nos dice que la fuerza electromotriz neta alrededor de un circuito cerrado es igual a la suma de las resistencias multiplicada por la corriente. En este caso, \mathcal{R} y Φ son análogos a la resistencia y a la corriente, respectivamente.

NOTA EXTRA:

Se recuerda aquí el concepto de *reluctancia de un circuito magnético* (ecs. 5.2 y 5.6, pág. 15 del Tema 2 de los apuntes de la asignatura: *Magnetostática en medios materiales*).

Un circuito magnético también implica una fuente que establezca un flujo en torno a dicho circuito magnético. A este flujo se opone la reluctancia, definida por:

$$\text{Reluctancia } \mathcal{R} = \frac{\text{f.m.m.}}{\text{flujo}} = \frac{F(= NI)}{\Phi} = \frac{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}} = \frac{Hl}{BA} = \frac{l}{\mu A}$$

En el caso de transformadores ideales, no estaríamos considerando flujos de fuga, con lo que $\mu \rightarrow \infty, \mathcal{R} = 0$ (como se verá más adelante en estas notas, en lo relativo a transformadores reales y corrientes parásitas).

Con lo cual, (6.1) puede expresarse entonces como

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (6.2)$$

Esta ecuación establece que la razón entre las corrientes de los circuitos primario y secundario de un transformador ideal es igual a la inversa de la razón de transformación (N_1/N_2). Por otro lado, la ley de Faraday nos dice:

$$v_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad (6.3)$$

y

$$v_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad (6.4)$$

Donde los signos apropiados de v_1 y v_2 se han tenido en cuenta por las polaridades indicadas en la Fig. 11. A partir de (6.3) y (6.4) tenemos por tanto que

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (6.5)$$

De este modo, aquí sí la razón entre los voltajes de los circuitos primario y secundario de un transformador ideal es igual a la razón de transformación.

Cuando el circuito secundario termina en una resistencia de carga R_L , como se muestra en la Fig. 11, la carga efectiva vista por la fuente conectada al circuito primario es

$$(R_1)_{efec} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{(N_1/N_2)v_2}{(N_2/N_1)i_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L \quad (6.6)$$

que es la resistencia de la carga multiplicada por el cuadrado de la razón de transformación.

Transformadores reales y corrientes parásitas.

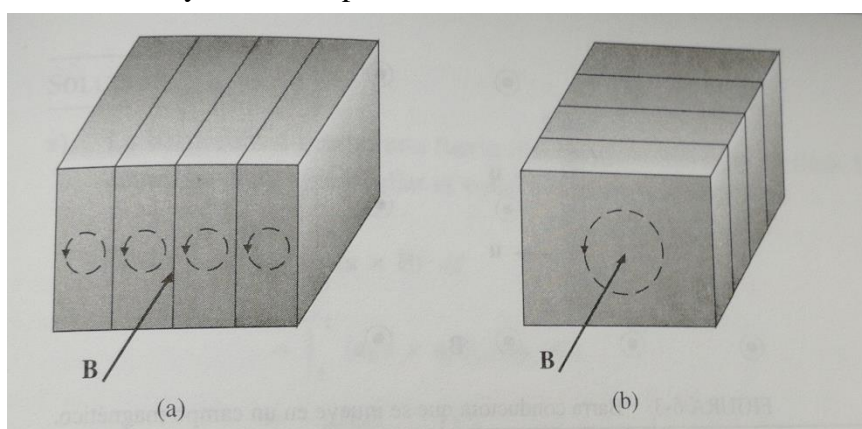


Figura 12. Núcleos laminados en un campo magnético variable con el tiempo.

La inductancia de una bobina es proporcional a la permeabilidad del medio. Por lo tanto, la suposición de un μ infinita para un transformador ideal también implica inductancias infinitas.

En los transformadores reales tenemos las siguientes condiciones: la existencia de flujo de fuga, inductancias finitas, resistencia distinta de cero en el circuito, la presencia de histéresis y pérdidas por corrientes parásitas. La naturaleza no lineal del núcleo ferromagnético (la dependencia de la permeabilidad con la intensidad del campo magnético) complica aún más el problema de un análisis exacto de los transformadores reales.

Cuando un flujo magnético variable con el tiempo fluye por el núcleo ferromagnético, se produce una fuerza electromotriz inducida de acuerdo con la ley de Faraday. Esta fuerza electromotriz inducida producirá corrientes locales en el núcleo conductor, normales al flujo magnético. Estas corrientes se denominan *corrientes parásitas*. Las corrientes parásitas producen una pérdida óhmica de potencia y generan calor local. De hecho, éste es el principio del calentamiento por inducción. Se han construido hornos por inducción que generan temperaturas lo suficientemente altas como para fundir metales. Esta pérdida de potencia por las corrientes parásitas en los transformadores no es deseable

y puede reducirse usando materiales para el núcleo que tengan alta permeabilidad (μ alta y σ baja). Una forma económica de reducir las pérdidas por corrientes parásitas en aplicaciones de baja frecuencia-alta potencia es usar núcleos laminados, es decir, formar los núcleos de los transformadores con láminas ferromagnéticas (de hierro) apiladas, cada una eléctricamente aislada de sus vecinas mediante una delgada capa de barniz u óxido. El recubrimiento aislante debe ser paralelo a la dirección del flujo magnético, como se ilustra en la Fig. 12(a), para que las corrientes parásitas normales al flujo estén restringidas a las láminas. Es evidente que la disposición de la Fig. 12(b), con capas aisladas normales al flujo magnético, tiene poco efecto en la reducción de las pérdidas por corrientes parásitas. Puede demostrarse que la pérdida total por corrientes parásitas se reduce al aumentar el número de láminas. La reducción en la pérdida de potencia depende de la forma y el tamaño de la sección transversal, además del método de laminado.

7. Fuerza magnética

Si se permite que una parte del circuito se desplace, entonces la energía consumida de la batería se emplea como energía mecánica del desplazamiento y para aumentar la energía magnética. Por el principio de conservación de la energía tenemos que

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} + dW_m = dW_b \quad (7.1)$$

donde dW_b es la energía suministrada por las baterías a fin de mantener constantes las corrientes. Utilizando la expresión $W_m = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i$ -ec. (3.11)- si la corriente se mantiene constante en un sistema de circuitos,

$$dW_m = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\Phi_i, \quad (7.2)$$

Y según la relación $dW_b = Id\Phi$, para contrarrestar la fuerza electromotriz y mantener la intensidad I constante,

$$dW_b = \sum_i I_i d\Phi_i, \quad (7.3)$$

Por lo que, utilizando (7.1), resulta:

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = dW_b - dW_m = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\Phi_i = dW_m \quad (7.4)$$

Por lo tanto, la fuerza es:

$$\vec{F} = (\nabla W_m)_I \quad (7.5)$$

El subíndice I indica que la corriente se mantiene constante.

Si no hay resistencia óhmica (por ejemplo: conductores perfectos, superconductores, etc.) $d\Phi = 0$, ya que una variación de flujo generaría $I = \infty$; en otras palabras; cuando circula una intensidad sin que las baterías sean necesarias, el flujo es constante. O al contrario, si el flujo se mantiene constante, no hay fuerza electromotriz y las baterías no suministran energía. Por lo tanto

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} + dW_m = 0 \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{l} = -dW_m \quad (7.6)$$

y resulta

$$\vec{F} = -(\nabla W_m)_\Phi \quad (7.7)$$

donde el subíndice Φ indica que el flujo se mantiene constante durante el desplazamiento virtual del circuito.

Aunque obtengamos expresiones de signo contrario, la fuerza sobre el circuito es única y da el mismo resultado haciendo el cálculo a Φ constante o a I constante. Esto quiere decir que el cambio de energía magnética depende de si se mantiene constante I o Φ , pero la fuerza sobre el circuito es independiente del desplazamiento virtual que se considere para calcularla.

8. Ecuaciones de Maxwell y ecuaciones de onda homogéneas para \vec{E} y \vec{H}

La ecuación $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$ no está de acuerdo con el principio de conservación de la carga (ecuación de continuidad):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{j} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (8.1)$$

Tenemos que modificar la ecuación de $\nabla \times \vec{H}$ añadiéndole el término $\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$ al miembro derecho de la ecuación anterior:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (8.2)$$

Puesto que $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$, se obtiene

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \nabla \cdot \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (8.3)$$

Lo que implica:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{contribución de Maxwell}) \quad (8.4)$$

donde $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ es la corriente de desplazamiento (A/m²).

Por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell son las siguientes:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (8.5)$$

Las relaciones constitutivas, para medios lineales homogéneos e isotrópicos (l. h. i.), son:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E} \end{aligned} \quad (8.6)$$

Para resolver un problema general, además de las ecuaciones (8.5) y (8.6) se necesita la Fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Ecuaciones de Maxwell		
Forma diferencial	Forma integral	
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$	Ley Faraday
$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$	Ley Àmpere-Maxwell
$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$	$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$	Ley Gauss
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$	∄ carga magnética aislada

8.1. Condiciones de frontera

- Condición en la frontera de la componente tangencial de \vec{E} :

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (V/m) \quad (8.7)$$

- Condición en la frontera para la componente tangencial de \vec{H} :

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K} \quad (A/m) \quad (8.8)$$

- Condición en la frontera de la componente normal de \vec{D} :

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (C/m^2) \quad (8.9)$$

- Condición en la frontera en la componente normal de \vec{B} :

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (T) \quad (8.10)$$

8.2. Funciones de potencial

Sabemos que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, si sustituimos esta ecuación en la forma diferencial de la ley de inducción de Faraday (1.1):

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \\ \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -\nabla V \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (V/m) \end{aligned} \quad (8.11)$$

Sustituyendo

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad y \quad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

en la expresión

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

y usando las relaciones constitutivas $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ y $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ tenemos:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (8.12)$$

donde se ha supuesto un medio homogéneo. Recordando la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{j} - \nabla \left(\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (8.13)$$

o

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (8.14)$$

Esta ecuación (8.14) correspondería con una ecuación diferencial acoplada, es decir, una ecuación diferencial de segundo orden híbrida (híbrida ya que contiene a \vec{A} y V).

La definición de un vector requiere la especificación de su rotacional y su divergencia. Aunque el rotacional de \vec{A} está dado por $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$, tenemos la libertad de elegir su divergencia. Sea

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{Condición de Lorentz para los potenciales} \quad (8.15)$$

que hace nulo el segundo término del lado derecho de la ecuación (8.14) y ésta se reduce a:

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad (8.16)$$

que es la *ecuación de onda no homogénea para el potencial vectorial*. Se denomina ecuación de onda porque sus soluciones representan ondas que se propagan con velocidad igual a $u_p = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. La relación entre \vec{A} y V en la ecuación (8.15) se conoce como *condición de Lorentz* (o *gauge de Lorentz*) *de los potenciales*. En el caso de campos estáticos se reduce a la condición $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

La ecuación correspondiente al potencial escalar V es

$$\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (8.17)$$

que es la *ecuación de onda no homogénea para el potencial escalar* V . De esta forma, la condición de Lorentz de (8.15) separa las ecuaciones de onda de \vec{A} y V . Observe la similitud entre las ecuaciones (8.16) y (8.17) y la analogía entre las cantidades: $\vec{A} \sim V$, $\vec{J} \sim \rho_v$ y $\mu \sim 1/\epsilon$.

Si eligiéramos unos nuevos potenciales:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \xi, \quad V' = V - \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (8.18)$$

Éstos darían exactamente los mismos campos \vec{E} y \vec{B} cuando se sustituyeran en las ecuaciones

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{y} \quad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

sin importar el valor que usemos para la función ξ , que es completamente arbitraria. Este cambio a los nuevos potenciales físicamente equivalentes se llama *transformación de norma* (*condiciones de simetría gauge*). Al sustituir ahora \vec{A}' y V' en la condición de Lorentz (8.15), obtenemos, después de reordenar términos, una ecuación de onda escalar para ξ ,

$$\nabla^2 \xi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}\right) \quad (8.19)$$

como la condición de que \vec{A}' y V' deberán satisfacer la condición de Lorentz. Por tanto, si los potenciales originales satisfacen la condición de Lorentz, los nuevos también lo harán, siempre que ξ satisfaga la ecuación de onda escalar homogénea. Si los \vec{A} y V originales no la satisfacen, aún podemos encontrar nuevos potenciales que sí lo harán, eligiendo ξ como una solución de la ecuación de onda escalar no homogénea con

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

como el término fuente. Una elección de potenciales que satisfaga la condición de Lorentz se denomina *norma de Lorentz*.

8.3. Resolución de ecuaciones de onda

Consideremos ahora la solución de la ecuación de onda no homogénea (8.17) para un potencial escalar V debido a una distribución de carga ρ_v en una región finita. Situemos una carga puntual elemental $\rho_v dv'$ en el origen en el instante t . A una distancia R alejada del origen podemos suponer simetría esférica (es decir, V depende únicamente de R y de t , no de θ ni de ϕ). De esta forma, utilizando el laplaciano de V en esféricas, podemos poner la ecuación (8.17) como:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (8.20)$$

Introducimos ahora una nueva variable:

$$V(R, t) = \frac{1}{R} U(R, t) \quad (8.21)$$

que simplifica la ecuación (8.20) a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (8.22)$$

La ecuación (8.22) es una ecuación de onda unidimensional homogénea. Puede comprobarse por sustitución directa que cualquier función de $(t - R\sqrt{\mu\varepsilon})$ [y $(t + R\sqrt{\mu\varepsilon})$] que sea diferenciable dos veces será una solución de dicha ecuación. Por tanto, se ensaya la solución

$$U(R, t) = f(t - R\sqrt{\mu\varepsilon}) + g(t + R\sqrt{\mu\varepsilon}) \quad (8.23)$$

Si llevamos a cabo el cambio de variable $\omega = t - R\sqrt{\mu\varepsilon}$, tenemos que

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{dU}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial R} = \frac{dU}{d\omega} (-\sqrt{\mu\varepsilon}) = -\sqrt{\mu\varepsilon} \frac{dU}{d\omega} \quad (8.24)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} = -\sqrt{\mu\varepsilon} \frac{d^2 U}{d\omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial R} = \mu\varepsilon \frac{d^2 U}{d\omega^2} \quad (8.25)$$

Por otro lado

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{dU}{d\omega} \rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{d^2 U}{d\omega^2} \quad (8.26)$$

Una vez definidas las derivadas parciales segundas, identificamos los diferentes términos de la ecuación, para comprobar que estamos ante una solución de esta ecuación en derivadas parciales.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \rightarrow \mu\varepsilon \frac{d^2 U}{d\omega^2} - \mu\varepsilon \frac{d^2 U}{d\omega^2} = 0 \quad c. q. d.$$

Con lo cual

$$U(R, t) = f(t - R\sqrt{\mu\varepsilon}) \quad (8.27)$$

es solución de la ecuación.

Tras confirmar esta solución a la ecuación de ondas, tenemos que necesariamente la expresión del potencial asociado será de la forma

$$V(R, t) = \frac{f(t - R\sqrt{\mu\varepsilon})}{R} \quad (8.28)$$

El término de la ecuación anterior corresponde con una onda esférica, que viaja a una velocidad $u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ con dirección radial respecto a donde está colocada nuestra carga puntual ($\rho_v dv'$) y manteniendo una amplitud constante en una esfera de radio R centrada en dicha carga. Además, se puede definir el retardo como

$$R\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{R}{u_p} \quad (8.29)$$

Por consiguiente, f representaría una onda que diverge del origen de coordenadas (que se aleja de la carga).

Con la finalidad de determinar la expresión de esta función f , tomamos incrementos de potencial de la forma

$$\Delta V(R, t) = \frac{\Delta f(t - R\sqrt{\mu\varepsilon})}{R}, \quad (8.30)$$

Una vez hecho esto, consideramos un punto muy cercano a la carga que estamos modelando ($R \rightarrow 0$), de esta forma el retardo puede ser ignorado:

$$\Delta V(R, t) = \frac{\Delta f(t)}{R}. \quad (8.31)$$

Por otro lado, sabemos que un incremento de potencial (creado por un diferencial de carga volumétrica) en un punto de la vecindad de la carga, atiende a la expresión

$$\Delta V(R, t) = \frac{\rho_v(t) dv'}{4\pi\epsilon R}. \quad (8.32)$$

Con lo que, igualando (8.31) con (8.32), podemos determinar la expresión de $\Delta f(t)$, como

$$\Delta f(t) = \frac{\rho_v(t) dv'}{4\pi\epsilon}. \quad (8.33)$$

Esta expresión será válida para todo t . Por lo tanto, si tomamos en cuenta el retardo, de manera general, tendremos que

$$\Delta f(t - R\sqrt{\mu\epsilon}) = \frac{\rho_v(t - R\sqrt{\mu\epsilon}) dv'}{4\pi\epsilon}, \quad (8.34)$$

con lo que, recordando que la velocidad a la que se transmite la onda vendría dada por la expresión $u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$, se llegaría a

$$\Delta f\left(t - \frac{R}{u_p}\right) = \frac{\rho_v\left(t - \frac{R}{u_p}\right) dv'}{4\pi\epsilon}. \quad (8.35)$$

Finalmente, por medio de (8.30), tenemos

$$\Delta V(R, t) = \frac{\rho_v(t - R\sqrt{\mu\epsilon}) dv'}{4\pi\epsilon R}. \quad (8.36)$$

Mediante la ecuación anterior se puede determinar el potencial debido a una distribución de carga $\rho_v(t)$ en un volumen V' (volumen que contiene a las cargas) como

$$V(R, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_v(t - R/u_p)}{R} dv' \quad (V) \quad (8.37)$$

La ecuación (8.23) indica que el potencial escalar a una distancia R de la fuente en un instante t depende del valor de la densidad de carga en un instante anterior $(t - R/u_p)$. Por esta razón, $V(R, t)$ en la ecuación (8.37) se denomina **potencial escalar retardado**.

La solución de la ecuación de onda no homogénea (8.16) para el potencial vector magnético \vec{A} puede obtenerse de la misma manera que hicimos con V . La ecuación vectorial (8.16) de \vec{A} puede descomponerse en tres ecuaciones escalares, cada una de éstas similar a la ecuación (8.17) de V . El **potencial vector retardado** está expresado entonces por

$$\vec{A}(R, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(t - R/u_p)}{R} dv' \quad (\text{Wb/m}) \quad (8.38)$$

Los campos eléctrico y magnético derivados por diferenciación de \vec{A} y V serán evidentemente funciones de $(t - R/u_p)$ y, por consiguiente, retardados en el tiempo. Se requiere un tiempo para que las ondas electromagnéticas se propaguen y se sientan los efectos de las cargas y las corrientes variables con el tiempo en puntos distantes. En la teoría de circuitos se ignora este efecto de retardo temporal y se supone una respuesta instantánea.

Podemos resolver la ecuación de onda para el potencial escalar (8.17) considerando fuentes armónicas, de forma que $V(t) = V e^{j\omega t}$.

En este caso, dicha expresión quedaría como

$$\nabla^2 V - \mu\varepsilon(j\omega)^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \quad (8.39)$$

o

$$\nabla^2 V + k^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \quad (8.40)$$

donde

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{u_p} \quad (8.41)$$

o

$$k = \frac{2\pi f}{u_p} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (8.42)$$

se denomina **número de onda**. Es una medida del número de longitudes de onda en un intervalo de 2π . De manera análoga, la forma fasorial de una ecuación de onda con dependencia armónica con el tiempo (8.16) para el potencial vector \vec{A} es

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (8.43)$$

Las ecuaciones (8.39) y (8.43) se conocen como **ecuaciones no homogéneas de Helmholtz**.

Por otro lado, si consideramos fuentes que presentan una variación armónica del tipo $\rho(t) = \rho_v e^{j\omega t}$ y $\vec{J}(t) = \vec{J} e^{j\omega t}$ (fuentes armónicas) y que $k = \omega/u_p$, las expresiones (8.37) y (8.38) se transforman en

$$V(R, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \frac{\rho_v e^{j\omega(t-R/u_p)}}{R} dv' = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \frac{\rho_v e^{j(\omega t - kR)}}{R} dv' \quad (8.44)$$

$$\vec{A}(R, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J} e^{j(\omega t - kR)}}{R} dv' \quad (8.45)$$

Por otro lado, desarrollando en serie de Taylor del factor exponencial e^{-jkR} resulta:

$$e^{-jkR} = 1 - jkR + \frac{k^2 R^2}{2} + \dots \quad (8.46)$$

Por lo tanto, si se considera que

$$kR \ll 1 \Rightarrow 2\pi \frac{R}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow R \ll \lambda \quad (8.47)$$

La exponencial e^{-jkR} puede aproximarse a 1. En ese caso, las expresiones (8.44) y (8.45) se convierten en:

$$V(R, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho_v e^{j\omega t}}{R} dv' \quad \vec{A}(R, t) \approx \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J} e^{j\omega t}}{R} dv' \quad (8.48)$$

Que son soluciones equivalentes a las que se aplicaban para campos estáticos. Los resultados (8.48) definen los denominados *potenciales cuasi-estacionarios*, debido a que tienen la misma variación espacial que los campos estáticos, pero en este caso varían de forma armónica con el tiempo. La aproximación cuasi-estacionaria se debe a que el retardo es despreciable, o de otro modo según (8.47), las dimensiones del circuito R son lo suficientemente pequeñas comparadas con la longitud de onda λ de la señal de tal modo, que el tiempo que requieren para propagarse de una parte a otra del circuito es despreciable (matemáticamente, esto corresponde a la aproximación $e^{-jkR} \approx 1$). Por lo tanto, la aplicación más importante de los campos cuasi-estacionarios es la teoría de circuitos. Estos campos representan el eslabón de enlace entre la Teoría del campo electromagnético y la Teoría de circuitos que fueron desarrollados independientemente.

8.4. Ecuaciones de onda homogéneas

Los campos \vec{E} y \vec{H} variables con el tiempo están acoplados a través de las ecuaciones de rotacional de Maxwell. El resultado es una onda electromagnética, la cual se usará para explicar la acción electromagnética a distancia.

En medios no conductores libres de fuentes (l.h.i.), caracterizados por ϵ y μ ($\sigma = 0$), las ecuaciones de Maxwell se reducen a:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= \nabla \cdot (\mu \vec{H}) = \mu \nabla \cdot \vec{H} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H}) = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E}) = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.49)$$

Aplicando el rotacional a ambos términos de la ecuación $\nabla \times \vec{E}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (8.50)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot \boxed{(\nabla \cdot \vec{E})} - \nabla^2 \cdot \vec{E} \quad (8.51)$$

Se obtiene:

$$\nabla^2 \cdot \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (8.52)$$

Donde, la velocidad de propagación de la onda viene expresada por:

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (8.53)$$

$$\nabla^2 \cdot \vec{E} - \frac{1}{u_p^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (8.54)$$

De forma similar, se puede obtener para el campo \vec{H} :

$$\nabla^2 \cdot \vec{H} - \frac{1}{u_p^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (8.55)$$

Las ecuaciones anteriores son las ecuaciones de onda vectoriales homogéneas de \vec{E} y \vec{H} respectivamente.

Sin embargo, no es suficiente que estas ecuaciones se satisfagan; las ecuaciones de Maxwell también deben satisfacerse. Está claro que las ecuaciones (8.54) y (8.55) son una consecuencia necesaria de las ecuaciones de Maxwell, pero lo inverso no es cierto. Al resolver las ecuaciones de onda, debe tenerse especial cuidado con obtener soluciones a las ecuaciones de Maxwell. Es necesario tener en cuenta que las ecuaciones de onda (de segundo orden) se obtienen mediante el cálculo del rotacional de las ecuaciones de Maxwell (de primer orden), es decir, del rotacional del rotacional de los campos y esta doble aplicación del rotacional no tiene idénticas propiedades que la aplicación simple de dicho operador.

Notación fasorial:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (8.56)$$

donde:

$I_0 \rightarrow$ amplitud

$\omega \rightarrow$ frecuencia angular (rad/s) = $2\pi f$

$$\begin{aligned}
f &\rightarrow \text{frecuencia (Hz)} \\
\phi &\rightarrow \text{ángulo de fase} \\
e^{j\omega t} &= \cos \omega t + j\text{sen}\omega t; \\
j &= \sqrt{-1} \\
\cos \omega t &= \text{Re}(e^{j\omega t}) \\
\text{sen}\omega t &= \text{Im}(e^{j\omega t})
\end{aligned}$$

Por lo tanto $i(t)$ puede expresarse como:

$$i(t) = \text{Re}[(I_0 e^{j\phi}) e^{j\omega t}] = \text{Re}[I_s e^{j\omega t}] \quad (8.57)$$

$I_s = I_0 e^{j\phi}$ es un fasor escalar que contiene información de la amplitud y la fase pero es independiente de t :

$$\begin{aligned}
\frac{di(t)}{dt} &= \text{Re}(j\omega I_s e^{j\omega t}) \\
\int i(t) dt &= \text{Re}\left(\frac{I_s}{j\omega} e^{j\omega t}\right)
\end{aligned} \quad (8.58)$$

Teniendo en cuenta la notación fasorial, los campos pueden expresarse con referencia a $\cos \omega t$ como:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re}[\vec{E}(x, y, z) e^{j\omega t}] \quad (8.59)$$

$\vec{E}(x, y, z) \rightarrow$ fasor vectorial que contiene información sobre la dirección, magnitud y fase.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{E}(x, y, z, t)}{\partial t} &= j\omega \vec{E}(x, y, z) \\
\int \vec{E}(x, y, z, t) dt &= \frac{\vec{E}(x, y, z)}{j\omega}
\end{aligned} \quad (8.60)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell con dependencia armónica con el tiempo en términos de los fasores vectoriales de campo (\vec{E}, \vec{H}) y los fasores fuente (ρ_v, \vec{J}) en un medio lineal, isotrópico y homogéneo son:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_v}{\epsilon} \\
\nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} & \left(\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \\
\nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E} & \left(\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)
\end{aligned} \quad (8.61)$$

Para campos con dependencia armónica con el tiempo, las ecuaciones de onda homogéneas, para \vec{E} y \vec{H} se convierten en:

$$\nabla^2 \cdot \vec{E} - \frac{1}{u_p^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \cdot \vec{E} + \frac{\omega^2}{u_p^2} \vec{E} = 0, \quad (8.62)$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (j\omega \vec{E}) = j\omega(j\omega \vec{E}) = -\omega^2 \vec{E}. \quad (8.63)$$

El número de onda (número de longitudes de onda en un intervalo 2π) ya ha sido definido anteriormente:

$$k = w\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{w}{u_p} = \frac{2\pi f}{u_p} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{rad/m}) \quad (8.64)$$

$(\lambda f = u_p)$

Por lo tanto, se obtienen las siguientes ecuaciones para \vec{E} y \vec{H} :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \cdot \vec{E} + k^2 \vec{E} &= 0 \\ \nabla^2 \cdot \vec{H} + k^2 \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (8.65)$$

9. Energía Electromagnética y vector de Poynting

Las ondas electromagnéticas transportan energía electromagnética y esta energía se transporta por el espacio a puntos receptores distantes. Recordemos que la potencia electromagnética disipada por unidad de volumen está dada por $w = \vec{j} \cdot \vec{E}$. Si se integra esta expresión sobre un volumen arbitrario V , se obtiene la pérdida de energía electromagnética por unidad de tiempo, W

$$W = \int_V w dv = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dv \quad (9.1)$$

que sería conveniente expresar en función de los vectores de campo. Si despejamos la densidad de corriente de la Ley de Àmpere-Maxwell $\vec{j} = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ y la sustituimos en la expresión anterior, tenemos

$$W = \int_V \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) dv - \int_V \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dv \quad (9.2)$$

Al utilizar la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \quad (9.3)$$

y la Ley de Faraday $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, podemos escribir el primer integrando de (9.2) como

$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) &= \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \\ &= -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})\end{aligned}\quad (9.4)$$

que si se sustituye en la expresión (9.2) y se utiliza el teorema de la divergencia, se obtiene:

$$-\int_V \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dv = W + \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} \quad (9.5)$$

expresión que se conoce como *teorema de Poynting*.

Hasta ahora el planteamiento ha sido completamente general. Sin embargo, resulta más sencillo interpretar este resultado si se restringe a medios l.h.i. Así, al utilizar las ecuaciones constitutivas se obtiene $\vec{E} \cdot (\partial \vec{D} / \partial t) = \epsilon \vec{E} \cdot (\partial \vec{E} / \partial t) = \partial \left(\frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 \right) / \partial t$ y $\vec{H} \cdot (\partial \vec{B} / \partial t) = \partial (\vec{B}^2 / 2\mu) / \partial t$. Al sustituir estas ecuaciones en (9.5) y recordando que se está utilizando un volumen V de fronteras fijas de modo que se puede intercambiar el orden de diferenciación e integración (se pueden sacar las derivadas fuera de la integral), y utilizar (9.2), se obtiene finalmente

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu} \right) dv = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dv + \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} \quad (9.6)$$

Se observa ahora que el integrando del miembro izquierdo no es sino la suma de las densidades de energía eléctrica y magnética. Si se hace la suposición de que esas energías se pueden interpretar de la misma forma cuando los campos varían con el tiempo, entonces el integrando será la densidad total de energía electromagnética

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu} \quad (9.7)$$

y la integral será exactamente la energía electromagnética total contenida en el volumen V . En consecuencia, el miembro izquierdo de (9.5) representa la rapidez de *disminución* de esta energía total. El primer término del miembro derecho es la velocidad a la que esta energía se convierte en calor (pérdida de energía electromagnética por unidad de tiempo). Si se recuerda el principio de conservación de la energía, entonces cualquier cantidad de energía que no se convierta en calor *debe* salir del volumen V a través de su frontera S . Dado que el término restante viene expresado a través de una integral sobre una superficie, se puede interpretar

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = \left(\frac{dW}{dt} \right)_{\text{a través de } S} \quad (9.8)$$

como la rapidez con que fluye la energía a través de la superficie limitante. Lo siguiente que se puede hacer es interpretar de manera similar el integrando de (9.8), por lo tanto,

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (W/m^2) \quad (9.9)$$

Será la rapidez con que fluye la energía electromagnética por unidad de superficie. En otras palabras, es un vector que representa la *densidad de flujo de potencia*. La cantidad \vec{S} recibe el nombre *de vector de Poynting*; su dirección es la misma que la del flujo instantáneo de energía, es decir, que “apunta” en la dirección del flujo de energía.

10. Momento electromagnético

Se puede demostrar que, en el vacío, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\vec{F} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) dv = 0 \quad (10.1)$$

donde V representa todo el espacio.

La fuerza \vec{F} actúa sobre los portadores de carga en reposo o en movimiento, es decir, sobre las partículas cargadas que forman la materia. Por otro lado la ley de Newton establece que $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, \vec{p} es el momento mecánico de las partículas. Sustituyendo esta relación en la ecuación anterior y dado que en este caso no hay diferencia entre la derivada parcial y total, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{p} + \int_V \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) dv \right) = 0 \quad (10.2)$$

La ecuación anterior muestra que el momento, cantidad de movimiento, total no varía, se conserva. Al término integral se le conoce con el nombre de ***momento electromagnético***,

$$\vec{p}_e = \int_V \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) dv \quad (10.3)$$

También se puede introducir la ***densidad de momento electromagnético***,

$$\vec{g} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) = \epsilon_0 \mu_0 (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{1}{c^2} \vec{S} \quad (10.4)$$

Vemos que la densidad de momento electromagnético \vec{g} es igual al vector de Poynting dividido por el cuadrado de la velocidad de propagación del campo electromagnético en el vacío.

Por analogía con la mecánica, la ***densidad de momento angular*** viene dado por:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{g} = \epsilon_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (10.5)$$

11. Ondas electromagnéticas planas

Una onda plana uniforme es una solución particular de las ecuaciones de Maxwell teniendo \vec{E} la misma dirección, magnitud y fase en planos infinitos perpendiculares a la dirección de propagación (lo mismo para \vec{H}).

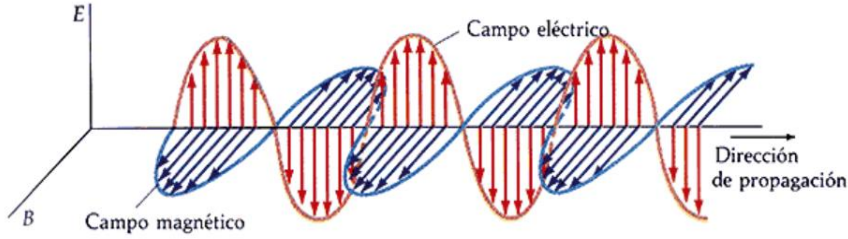


Figura 13. Representación de una onda electromagnética polarizada plana. Los campos eléctricos (\vec{E}) y magnético (\vec{B}) están en fase, perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de la onda.

La ecuación $\nabla^2 \cdot \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$ equivale, en coordenadas cartesianas, a tres ecuaciones escalares de Helmholtz para los componentes E_x , E_y , E_z . Para la componente E_x tenemos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_x = 0 \quad (11.1)$$

Como consideramos que E_x es uniforme (magnitud uniforme y fase constante) sobre superficies planas perpendiculares a z , $E_x \neq E_x(x, y)$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = 0 \quad (11.2)$$

Con lo cual, la ecuación anterior se simplifica a:

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0 \quad (11.3)$$

La solución que se propaga en la dirección z positiva es:

$$\begin{aligned} E_x(z) &= E_0 e^{-jkz} \\ (\text{solución general: } E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{jkz}) \\ \vec{E}(z) &= \hat{x} E_0 e^{-jkz} \end{aligned} \quad (11.4)$$

Aclaración: La exponencial negativa (e^{-jkz}) se refiere a la propagación en $+OZ$, mientras que la exponencial positiva (e^{jkz}) se refiere a la propagación en $-OZ$.

La expresión instantánea para una referencia coseno:

$$\vec{E}(z, t) = \hat{x} R_e [E_0 \cdot e^{j(\omega t - kz)}] = \hat{x} E_0 \cos(\omega t - kz) \quad (11.5)$$

El campo \vec{H} puede determinarse a partir de la ecuación:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ \vec{E} &= E_x(z)\hat{x} = E_0 e^{-jkz}\hat{x} \\ \nabla \times \vec{E} &= \hat{x} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \hat{y} = \frac{\partial}{\partial z} (E_0 \cdot e^{-jkz}) \hat{y} = -jkE_0 e^{-jkz} \hat{y} = -jkE_x(z) \hat{y} \\ -j\omega\mu\vec{H} &= -j\omega\mu(\hat{x}H_x + \hat{y}H_y + \hat{z}H_z) \end{aligned} \quad (11.6)$$

Por lo tanto, igualando las componentes en ambos miembros:

$$\begin{aligned} -jkE_x(z)\hat{y} &= -j\omega\mu H_y \hat{y} \\ kE_x(z) &= \omega\mu H_y(z) \\ H_y(z) &= \frac{k}{\omega\mu} E_x(z) \\ \vec{H} &= H_y(z)\hat{y} = \frac{k}{\omega\mu} E_x(z)\hat{y} \end{aligned} \quad (11.7)$$

Podemos expresar la relación anterior utilizando la impedancia intrínseca del medio:

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (\Omega) \\ \left(\frac{\omega\mu}{k} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \right) \\ \vec{H} &= \frac{1}{\eta} E_x(z)\hat{y} \end{aligned} \quad (11.8)$$

La expresión instantánea:

$$\vec{H}(z, t) = Re [H_y(z) e^{j\omega t}] \hat{y} = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - kz) \hat{y} \quad (11.9)$$

Por lo tanto \vec{E} y \vec{H} son perpendiculares y ambas son transversales a la dirección de propagación, tratándose por tanto de una onda transversal electromagnética (TEM).

Si nos centramos en un punto específico de la onda (un punto de una fase en particular), asignamos $\cos(\omega t - kz) = cte$ o $\omega t - kz = \text{fase constante}$, de lo cual obtenemos:

$$u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (11.10)$$

La ecuación (11.10) asegura que la velocidad de propagación de un frente de fase constante (la **velocidad de fase**) es igual a la velocidad de la luz.

Hemos visto que una onda plana uniforme caracterizada por $\vec{E} = E_x \hat{x}$ que se propaga en la dirección $+OZ$ tiene asociado un campo magnético $\vec{H} = H_y \hat{y}$. Por lo tanto, \vec{E} y \vec{H} son perpendiculares entre si y ambos son “transversales” a la dirección de propagación. Este es el caso específico de una onda transversal electromagnética (TEM). A continuación examinaremos la propagación de una onda plana uniforme en una dirección arbitraria que no coincide necesariamente con un eje de coordenadas.

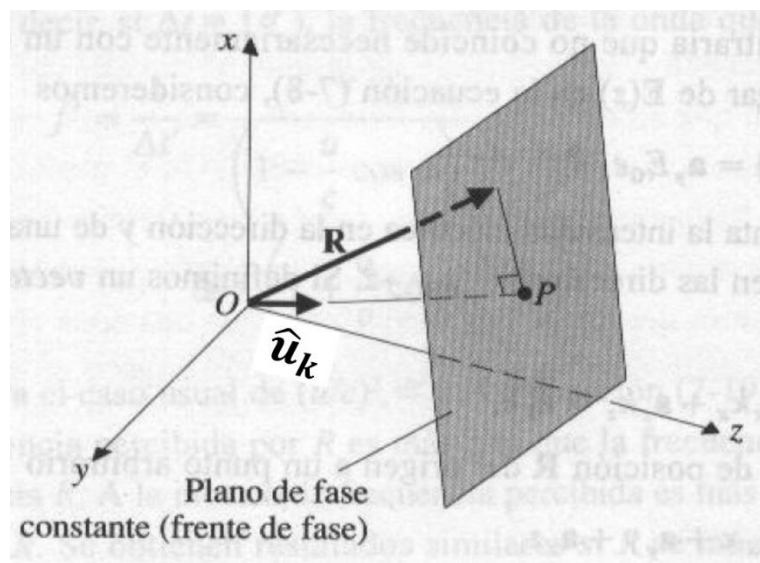


Figura 14. Vector de posición y vector unitario de onda normal al frente de fase de una plana uniforme.

Entonces, en lugar de la ecuación tal y como está planteada en (11.4), consideramos

$$\vec{E}(x, z) = E_0 e^{-jk_x x - jk_z z} \hat{y} \quad (11.11)$$

que representa la intensidad eléctrica en la dirección y de una onda plana uniforme que se propaga en las direcciones $+OX$ y $+OZ$. Si definimos un vector de número de onda \vec{k} , como

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z} = k \hat{u}_k \quad (11.12)$$

y un vector de posición \vec{R} del origen a un punto arbitrario

$$\vec{R} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}, \quad (11.13)$$

$$\vec{E} = E_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{R}} \hat{y} = E_0 e^{-jk \hat{u}_k \cdot \vec{R}} \hat{y} \quad (11.14)$$

Esta situación se ilustra en la Fig. 14. La relación

$$\hat{u}_k \cdot \vec{R} = \text{longitud } \overline{OP} \quad (\text{valor constante}) \quad (11.15)$$

es la ecuación del plano (lugar geométrico de los puntos extremos del vector de posición \vec{R}) normal a \hat{u}_k , la dirección de propagación, y es un plano de fase constante y amplitud uniforme.

Teniendo la ecuación (de Maxwell)

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}, \quad (11.16)$$

el campo magnético \vec{H} asociado con el campo eléctrico de la ecuación (11.14) puede expresarse como

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \vec{E} = \frac{E_0}{\omega\mu} (-\hat{x}k_z + \hat{z}k_x) e^{-jk_x x - jk_z z} \quad (11.17)$$

Podemos expresar la ecuación (11.17) en forma más general

$$\vec{H} = \frac{k}{\omega\mu} \hat{u}_k \times \vec{E} = \frac{1}{\eta} \hat{u}_k \times \vec{E} \quad (11.18)$$

De esta manera es fácil determinar \vec{H} usando la ecuación (11.18) si se conoce el valor de \vec{E} de una onda plana uniforme que se propaga en una dirección determinada.

12. Polarización de ondas planas

La polarización de una onda plana uniforme describe el comportamiento variable con el tiempo de \vec{E} en un punto determinado del espacio.

Si $\vec{E} = \hat{x}E_x (E_x > 0 \text{ o } E_x < 0)$ entonces la onda está linealmente polarizada en la dirección x.

La dirección de \vec{E} en un punto determinado puede variar con el tiempo:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \hat{x}E_1 \cos(\omega t - kz) + \hat{y}E_2 \cos(\omega t - kz - \pi/2) \\ &= \hat{x}E_1 \cos(\omega t - kz) + \hat{y}E_2 \text{sen}(\omega t - kz) \end{aligned} \quad (12.1)$$

donde hemos considerado la superposición de dos ondas polarizadas linealmente, una en la dirección x y la otra en la dirección y retrasada 90° ($\pi/2$) en la fase temporal. Es conveniente asignar $z=0$ al examinar el cambio de dirección de \vec{E} en un punto determinado a medida que varía t . En general $E_1 \neq E_2$ y la onda se dice que está elípticamente polarizada. Si $E_1 = E_2$, la onda estará circularmente polarizada (polarización circular a derechas). Si la componente y está adelantada 90° respecto a la x tendremos polarización circular a izquierdas.

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \hat{x}E_1 \cos(\omega t - kz) + \hat{y}E_2 \cos(\omega t - kz + \pi/2) \\ &= \hat{x}E_1 \cos(\omega t - kz) - \hat{y}E_2 \sin(\omega t - kz)\end{aligned}\quad (12.2)$$

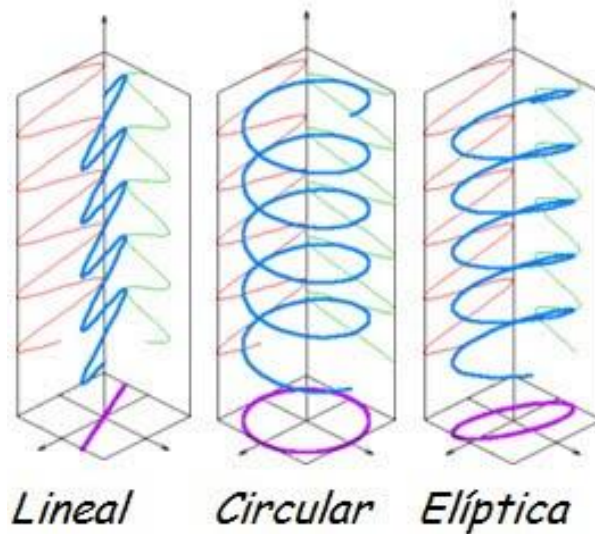


Figura 15. Tipos canónicos de ondas polarizadas.

Polarización a derechas	$\vec{E}(z) = E_1 e^{-jkz} \hat{x} - jE_2 e^{-jkz} \hat{y}$	(12.3)
-------------------------	---	--------

Polarización a izquierdas	$\vec{E}(z) = E_1 e^{-jkz} \hat{x} + jE_2 e^{-jkz} \hat{y}$	(12.4)
---------------------------	---	--------

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re}\{\vec{E}(z)e^{j\omega t}\} \quad (12.5)$$

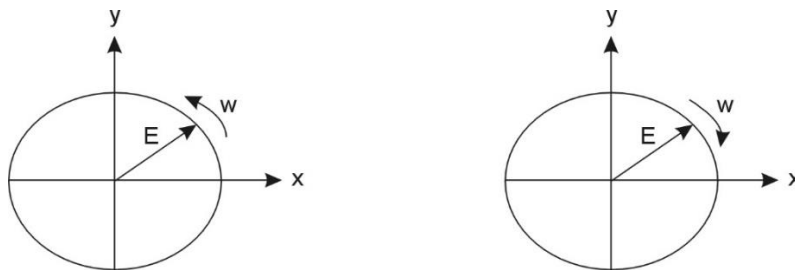


Figura 16. Representaciones gráficas ligadas a la polarización circular: izquierda – onda circularmente polarizada a derechas, derecha – onda circularmente polarizada a izquierdas.

Si tomamos en consideración la ecuación (12.1) evaluada en $z = 0$, tendremos

$$\vec{E}(0, t) = \hat{x}E_1 \cos(\omega t) + \hat{y}E_2 \sin(\omega t) \quad (12.6)$$

con lo cual, si partimos de $t = 0$ y vamos aumentando su valor, el producto ωt crecerá y consecuentemente, la componente x disminuye con valores positivos y la componente y aumenta también con valores positivos. Por lo tanto, la onda está realizando un giro anti-horario y tendremos como resultado una polarización a derechas.

Del mismo modo, si aplicamos un razonamiento análogo para el caso de la ecuación (12.2)

$$\vec{E}(0, t) = \hat{x}E_1 \cos(\omega t) - \hat{y}E_2 \sin(\omega t) \quad (12.7)$$

observaremos que la componente x disminuye con valores positivos, mientras que la componente y tomará valores cada vez más negativos.

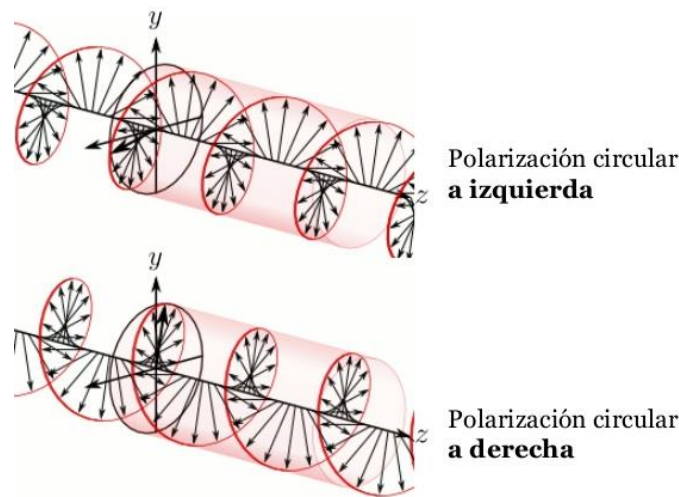


Figura 17. Ilustración de las dos tipologías de polarización circular existentes.

Demostremos que una onda plana linealmente polarizada puede descomponerse en una onda polarizada circularmente a derechas y una onda polarizada circularmente a izquierdas de igual amplitud.

Solución

Considere una onda plana polarizada linealmente que se propaga en la dirección $+OZ$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que \vec{E} está polarizado en la dirección x . Si empleamos la notación fasorial, tendremos

$$\vec{E}(z) = E_0 e^{-jkz} \hat{x}. \quad (12.8)$$

Pero esto puede escribirse como

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_{rc}(z) + \vec{E}_{lc}(z) \quad (12.9)$$

donde

$$\vec{E}_{rc}(z) = \frac{E_0}{2}(\hat{x} - j\hat{y})e^{-jkz} \quad (12.10)$$

y

$$\vec{E}_{lc}(z) = \frac{E_0}{2}(\hat{x} + j\hat{y})e^{-jkz} \quad (12.11)$$

Basándonos entonces en el análisis previo, podemos reconocer que $\vec{E}_{rc}(z)$ en la ecuación (12.10) y $\vec{E}_{lc}(z)$ en la ecuación (12.11) representan las ondas polarizadas circularmente de mano derecha y mano izquierda, respectivamente, cada una con amplitud $E_0/2$. Así hemos demostrado el enunciado de este problema. Por supuesto, también es verdadero el enunciado inverso: la suma de las ondas polarizadas circularmente de igual magnitud que giran en sentido opuesto es una onda polarizada linealmente.

13. Ondas planas en medios con pérdidas

Hasta ahora hemos considerado la propagación de ondas en medios l.h.i. sin pérdidas y sin fuentes ($\rho_v = 0$, $\vec{J} = 0$). Si un medio es conductor ($\sigma \neq 0$), fluirá una corriente $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ debido a la existencia del campo eléctrico. En ese caso, debemos cambiar la ecuación con la dependencia armónica con el tiempo $\nabla \times \vec{H}$ (8.4) por

$$\nabla \times \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E} = j\omega\left(\epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)\vec{E} = j\omega\epsilon_c\vec{E} \quad (13.1)$$

con

$$\epsilon_c = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \quad (\text{F/m}) \quad (13.2)$$

Las otras tres ecuaciones de Maxwell no cambian. Por lo tanto, las ecuaciones previamente presentadas para medios no conductores serán aplicables a medios conductores si se sustituye ϵ por la *permitividad compleja* ϵ_c de la ecuación (13.2).

Al aplicar a cuerpos materiales un campo eléctrico externo variable con el tiempo, se producen pequeños desplazamientos de las cargas ligadas que a su vez originan una densidad de volumen de polarización. Este vector de polarización variará con la misma frecuencia que el campo aplicado. Al aumentar la frecuencia, la inercia de las partículas cargadas tiende a evitar que el desplazamiento de las partículas se mantenga en fase con los cambios del campo, lo cual produce un mecanismo de amortiguamiento de las vibraciones que causa una pérdida de potencia debido al trabajo necesario para superar estas fuerzas de amortiguamiento. Este fenómeno de polarización, fuera de fase, puede caracterizarse por una susceptibilidad eléctrica compleja y por consiguiente por una

permitividad compleja. Si el cuerpo o medio material tiene además una cantidad importante de portadores de carga libre, como los electrones en un conductor, los electrones y huecos en un semiconductor o los iones en un electrólito, también se presentarán pérdidas óhmicas. Al estudiar estos medios es costumbre incluir los efectos de las pérdidas óhmicas y por amortiguamiento en la parte imaginaria de la permitividad compleja ϵ_c :

$$\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (\text{F/m}), \quad (13.3)$$

donde ϵ' y ϵ'' pueden ser funciones de la frecuencia. Alternativamente, podemos definir una conductividad equivalente que represente todas las pérdidas y escribir

$$\sigma = \omega\epsilon'' \quad (\text{S/m}). \quad (13.4)$$

Al combinar las ecuaciones (13.3) y (13.4) se obtiene la ecuación (13.2).

La razón ϵ''/ϵ' se denomina *tangente de pérdidas* porque es una medida de la pérdida de potencia en el medio:

$$\tan \delta_c = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \cong \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \quad (13.5)$$

La cantidad δ_c en la ecuación (13.5) se conoce como *ángulo de pérdidas*.

Se dice que un medio es *buen conductor* si $\sigma \gg \omega\epsilon$ y un *buen aislante* si $\omega\epsilon \gg \sigma$. Así, un material puede ser un buen conductor a frecuencias bajas pero tener las propiedades de un dieléctrico con pérdidas a frecuencias muy altas.

Como ϵ_c es compleja, k_c también lo será (número de onda complejo), siendo:

$$k_c = w\sqrt{\mu\epsilon_c} \quad (13.6)$$

Por lo tanto, la ecuación homogénea para el campo \vec{E} será:

$$\nabla^2 \vec{E} + k_c \vec{E} = 0 \quad (13.7)$$

Por otro lado, definimos la constante de propagación compleja γ , tal que

$$\gamma = jk_c = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_c} (m^{-1}), \quad (13.8)$$

donde se ha cambiado jk por jk_c en (11.4).

Si sustituimos $\epsilon_c = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$ (ec. 13.2) en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}\right)^{1/2}, \quad (13.9)$$

Esta expresión será de utilidad cuando se estudien los buenos conductores (i.e. $\sigma \gg \omega\epsilon$).

Si sustituimos $\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon''$ se obtiene:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^{1/2}, \quad (13.10)$$

expresión de gran utilidad para el estudio de dieléctricos con pequeñas pérdidas (i.e. $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$).

En un medio sin pérdidas, $\sigma = 0$, ($\varepsilon'' = 0$, $\varepsilon = \varepsilon'$), $\alpha = 0$ y $\beta = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$
 α y β constituyen las partes real e imaginaria de γ respectivamente.

La ecuación homogénea para el campo \vec{E} se convierte en

$$\nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0 \quad (13.11)$$

Teniendo en consideración que $k_c = \gamma/j$.

En el caso de una onda plana uniforme que se propaga en la dirección $+z$ y que está caracterizada por $\vec{E} = E_x \hat{x}$ y $\vec{H} = H_y \hat{y}$, la ecuación homogénea para \vec{E} se reduce a

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = \gamma^2 E_x \quad (13.12)$$

cuya solución es

$$E_x = E_0 e^{-\gamma z} = E_0 e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} \quad (13.13)$$

α y β son cantidades positivas. El primer factor $e^{-\alpha z}$ se reduce al aumentar z y por consiguiente es un factor de atenuación, α se denomina constante de atenuación y se mide en neper por metro (Np/m).

Si $\alpha = 1$ (Np/m), entonces una amplitud unidad de una onda se reduce al valor e^{-1} (= 0,368) al propagarse una distancia de un metro.

El segundo factor $e^{-j\beta z}$ es un factor de fase; donde β se conoce como constante de fase y se expresa en radianes por metro (rad/m). La constante de fase expresa la magnitud del cambio de fase que se produce cuando la onda viaja un metro.

14. Dieléctricos con pequeñas pérdidas

Un dieléctrico con pequeñas pérdidas es un buen aislante, con una conductividad equivalente distinta a cero ($\varepsilon'' \ll \varepsilon'$ ó $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1$). Si se presenta esta condición, γ se puede aproximar por:

$$\gamma = \alpha + j\beta \simeq j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \left[1 - j\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'} + \frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2 \right] \quad (14.1)$$

Para llevar a cabo esta aproximación se ha tenido que tener presente que $(1+x)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$.

Por lo tanto:

$$\alpha = \text{Re}(\gamma) \simeq \frac{\omega\varepsilon''}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \left(\frac{Np}{m} \right) \quad (14.2)$$

$$\beta = \text{Im}(\gamma) \simeq \omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2 \right] \left(\frac{rad}{m} \right) \quad (14.3)$$

Podemos ver de la ecuación (14.2) que la constante de atenuación (α) es una cantidad positiva y aproximadamente proporcional a la frecuencia.

Por otro lado, de la ecuación (14.3) se concluye que la constante de fase (β) varía muy poco con respecto al valor $\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ correspondiente a un dieléctrico perfecto (sin pérdidas).

La impedancia intrínseca de un dieléctrico con pequeñas pérdidas es una cantidad compleja:

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^{-1/2} \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \left(1 + j\frac{\varepsilon''}{2\varepsilon'} \right) (\Omega) \quad (14.4)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon' \left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)$ y que $(1+x)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$ y recordando que $\vec{H} = \frac{1}{\eta_c} E_x(z)\hat{y}$, para una onda plana, \vec{E} y \vec{H} no están en fase temporal, como lo estarían en un medio sin pérdidas.

La velocidad de fase u_p , se obtiene de la razón $\frac{\omega}{\beta}$. Para ello nos valemos de la expresión (14.3) obtenida para β :

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon'}} \left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2 \right] \left(\frac{m}{s} \right) \quad (14.5)$$

que es ligeramente menor que su valor cuando el medio no tiene pérdidas $\rightarrow (1+x)^{-1} \simeq 1 - x + x^2 + \dots$

15. Buenos conductores

Un buen conductor es un medio en el cual $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$. Por lo tanto, se puede llevar a cabo la siguiente aproximación de γ :

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}\right)^{1/2} \simeq j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}} = \sqrt{j}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma} \quad (15.1)$$

ó

$$\gamma = \alpha + j\beta \simeq (1+j)\sqrt{\pi f\mu\sigma} \quad (15.2)$$

donde se han utilizado las relaciones:

$\sqrt{j} = \left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^{1/2} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$ (nos quedamos con la solución positiva, puesto que α y β constituyen cantidades positivas).

$$\omega = 2\pi f$$

Por lo tanto, para un buen conductor $\alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma}$ ambos aumentan con \sqrt{f} y $\sqrt{\sigma}$.

Por otro lado, la impedancia intrínseca de un buen conductor es:

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \simeq \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\frac{-j\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}} = (1+j)\frac{\alpha}{\sigma} \quad (15.3)$$

que tiene un ángulo de fase de 45° . Teniendo en cuenta que

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta_c} E_x(z)\hat{y}; \vec{E} = E_x(z)\hat{x} = E_0 e^{-\gamma z}\hat{x} \quad (15.4)$$

el campo \vec{H} está retrasado 45° ($\frac{\pi}{4}$) respecto a \vec{E} .

La velocidad de fase para un buen conductor es $u_p = \frac{\omega}{\beta} \simeq \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$ ($\frac{m}{s}$) que es proporcional a \sqrt{f} y $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$.

Tomemos como ejemplo el cobre a una frecuencia de $3MHz$ ($\sigma = 5.80 \cdot 10^7 \frac{S}{m}$; $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$):

$$u_p = 720 \frac{m}{s}$$

que es muchos órdenes de magnitud más lenta que la velocidad de la luz en el vacío. La longitud de una onda plana en un buen conductor es:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{u_p}{f} = 2\sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}} (m) \quad (15.5)$$

Para el cobre a $3MHz$, se obtiene $\lambda = 0.24mm$. Una onda electromagnética de $3MHz$ tiene una longitud de onda de $100m$ en el vacío.

La constante de atenuación α de un buen conductor a frecuencias muy altas tiende a ser muy grande, de acuerdo con la ecuación

$$\alpha = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad (15.6)$$

En el caso del cobre a $3MHz$,

$$\alpha = 2.62 \cdot 10^4 \left(\frac{Np}{m}\right) \quad (15.7)$$

Puesto que el factor de atenuación es $e^{-\alpha z}$, la amplitud de la onda estará atenuada con un factor $e^{-1} = 0.368$ cuando se propague una distancia $\delta = \frac{1}{\alpha}$. Para el cobre a $3MHz$, esta distancia es de $0.038mm$. A $10GHz$ es solo de $0.66\mu m$.

Por lo tanto, una onda electromagnética de alta frecuencia se atenúa con gran rapidez al propagarse es un buen conductor. La distancia δ a la cual la amplitud de una onda plana viajera se reduce en un factor e^{-1} o 0.368 se conoce como profundidad de piel o profundidad de penetración del conductor.

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} (m) \quad (15.8)$$

como $\alpha = \beta$ en un buen conductor, se puede escribir δ como

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi} (m) \quad (15.9)$$

Para una f finita, σ tiende a infinito (conductor perfecto), entonces, dicha profundidad de penetración en el conductor δ tenderá a cero. Lo que quiere decir esto es que todos los campos se excluyen del interior de un buen conductor. La profundidad de penetración de un buen conductor a frecuencia de microondas es tan pequeña que podemos considerar, en la práctica, que los campos y las corrientes están confinadas a una capa muy delgada (esto es, en la piel) de la superficie del conductor.

16. Densidades de potencia instantánea y media

$$\vec{E}(z) = E_x(z)\hat{x} = E_0\hat{x} \cdot e^{-(\alpha+j\beta)z} \quad (16.1)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= Re[\vec{E}(z)e^{j\omega t}] = \hat{x} \cdot E_0 e^{-\alpha z} \cdot Re[e^{j(\omega t - \beta z)}] \\ &= \hat{x} \cdot E_0 e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned} \quad (16.2)$$

el fasor campo \vec{H} es

$$\vec{H}(z) = \hat{y}H_y(z) = \hat{y} \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} \cdot e^{-j(\beta z + \theta_\eta)} \quad (16.3)$$

donde hemos considerado que θ_η es al ángulo de fase de la impedancia intrínseca $\eta_c = |\eta_c| \cdot e^{j\theta_\eta}$ del medio.

La correspondiente expresión instantánea de $\vec{H}(z)$ es

$$\vec{H}(z, t) = \text{Re}[\vec{H}(z) \cdot e^{j\omega t}] = \hat{y} \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \quad (16.4)$$

La expresión instantánea del vector de Poynting o vector de densidad de potencia es

$$\vec{S}(z, t) = \vec{E}(z, t) \times \vec{H}(z, t) = \text{Re}[\vec{E}(z) \cdot e^{j\omega t}] \times \text{Re}[\vec{H}(z) \cdot e^{j\omega t}] \quad (16.5)$$

$$\vec{S}(z, t) = \hat{z} \cdot \frac{E_0^2}{|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z) \cdot \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \quad (16.6)$$

$$\vec{S}(z, t) = \hat{z} \cdot \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} [\cos \theta_\eta + \cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_\eta)] \quad (16.7)$$

donde se ha considerado la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}. \quad (16.8)$$

El valor medio del vector de Poynting es

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(z, t) dt = \hat{z} \cdot \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta \left(\frac{W}{m^2} \right), \quad (16.9)$$

en un medio sin pérdidas $\alpha = 0$, $\theta_n = 0$

$$\langle \vec{S} \rangle = \hat{z} \cdot \frac{E_0^2}{2\eta} \left(\frac{W}{m^2} \right). \quad (16.10)$$

En el caso general, la propagación no será en la dirección z, así que escribimos:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \left(\frac{W}{m^2} \right), \quad (16.11)$$

que es una fórmula general para calcular la densidad de potencia media en una onda que se propaga.

Puede demostrarse que si $f = f_0 \cdot e^{j\omega t}$ y $g = g_0 \cdot e^{j\omega t}$ se cumple

$$\langle \text{Re}(f) \cdot \text{Re}(g) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(f \cdot g^*) \quad (16.12)$$

Este resultado puede aplicarse para la demostración anterior:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*). \quad (16.13)$$

17. Espectro electromagnético

17.1. Explicación cualitativa del espectro electromagnético

Las ecuaciones de Maxwell no imponen ningún límite a la frecuencia de las ondas electromagnéticas. El espectro que experimentalmente ha sido investigado, hasta la fecha, aparece en la Fig. 18.

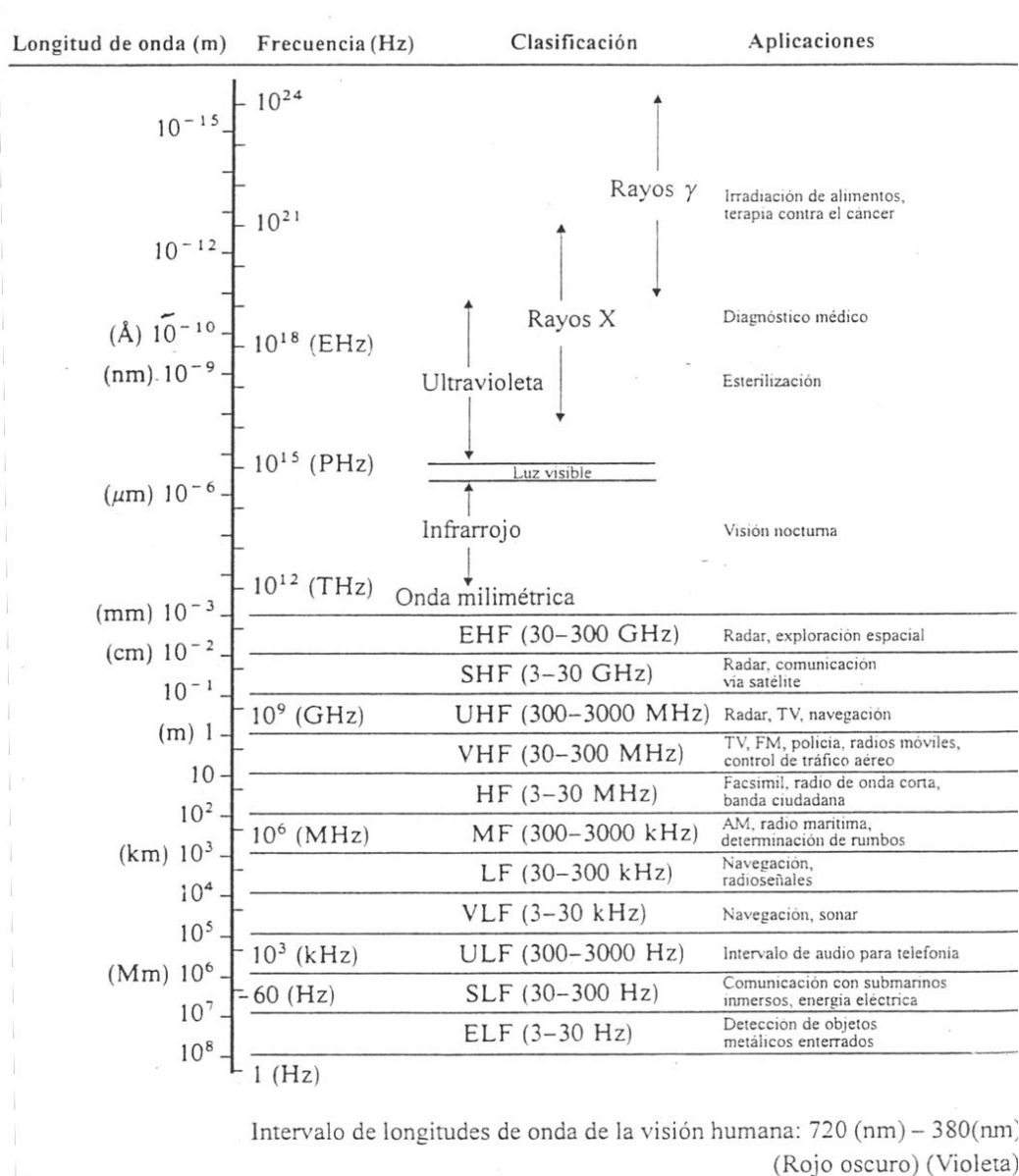


Figura 18. Espectro electromagnético.

Se extiende de forma continua desde las ondas largas de radio hasta los rayos gamma de altísima energía observados en la radiación cósmica. Para las primeras, las frecuencias son del orden de 10^4 Hz y las longitudes de onda de 3×10^4 m; para las últimas los valores correspondientes son 10^{24} Hz (y mayores) y 3×10^{-16} m (y menores). El espectro conocido cubre un rango de 20 o más órdenes de magnitud. La radio, la luz, los rayos X y los rayos gamma, todos son ejemplos de ondas electromagnéticas, aunque tanto fuentes y detectores como los fenómenos de interacción con la materia varían notablemente al cambiar la frecuencia en órdenes de magnitud.

Tanto en la citada Fig. 18 como en la Fig. 19 que se muestra a continuación, se presenta el espectro electromagnético dividido en intervalos de frecuencia y longitud de onda, de

acuerdo con su aplicación y su existencia natural, donde también se reporta la energía asociada a cada intervalo.

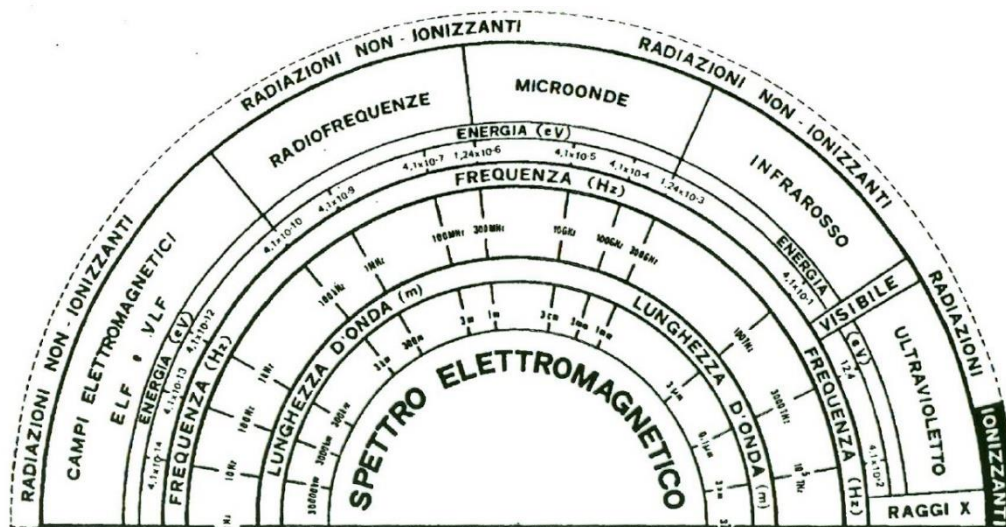


Figura 19. Espectro de ondas electromagnéticas dividido en intervalos de frecuencia y longitud de onda, así como la energía asociada a cada intervalo. La energía hf , donde h es la constante de Planck (6.63×10^{-34} J·s) y f la frecuencia, es la de un fotón o *quanto* de radiación.

17.2 Radiación ionizante y no ionizante

La radiación electromagnética, como se sabe, posee una doble naturaleza: puede ser considerada bajo su forma corpuscular, siendo entonces un flujo de fotones de energía hf (h = constante de Planck, f = frecuencia), o bien en su forma ondulatoria (campos, ecuaciones de Maxwell). A estas dos formas están ligadas las diversas interacciones con la naturaleza viviente.

Para frecuencias extremadamente elevadas, aquellas por encima de la luz visible, un fotón posee bastante energía para “arrancar” un electrón en el momento de una colisión con un átomo (efecto fotoeléctrico). En otras palabras, el átomo se ioniza, y se habla de radiación ionizante. Si el átomo forma parte de una molécula puede ocasionar la destrucción del enlace químico, o la creación de un nuevo enlace. Si la molécula forma parte de un gen en el interior del núcleo de una célula, su código genético puede ser modificado. Si la célula sobrevive, puede ponerse a proliferar defectuosamente (efecto cancerígeno), o simplemente transmite el cambio (mutación permanente). Este último fenómeno es la base de la evolución de las especies.

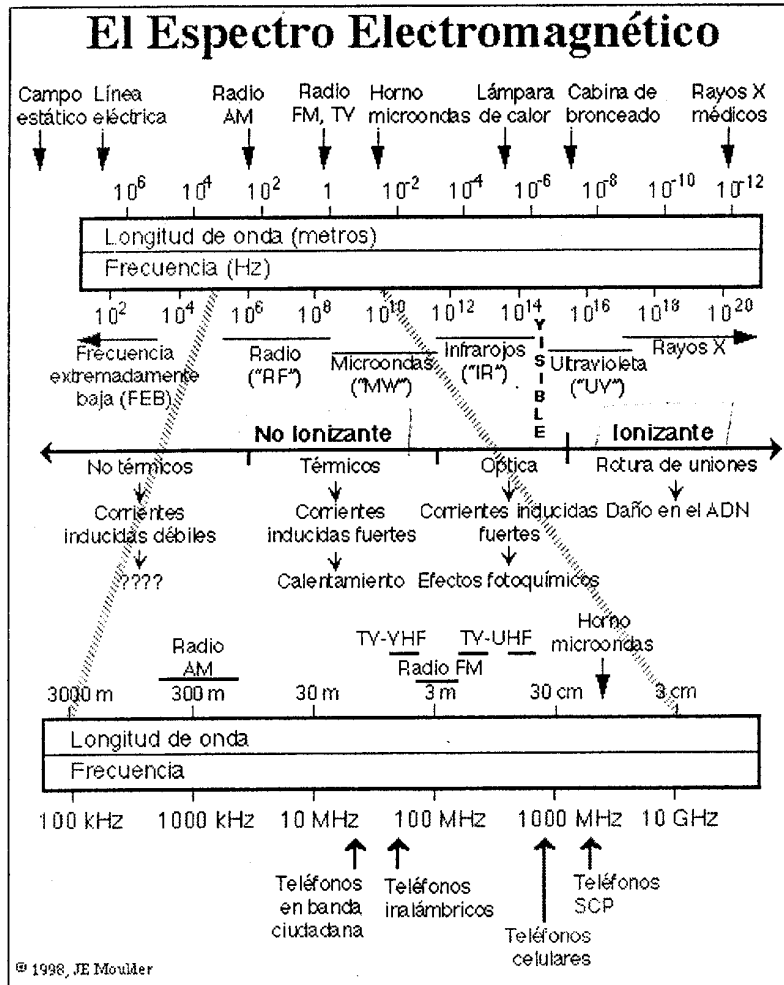


Figura 20. Subdivisión del espectro electromagnético, radiación ionizante y no ionizante.

En principio, la acción de un fotón es suficiente para producir una alteración. En realidad, la probabilidad de que así ocurra es muy pequeña, de lo que el riesgo es directamente proporcional al número de fotones recibidos: Se habla entonces de efecto acumulativo. Se han establecido normas, especificando el número de fotones ionizantes que una persona puede recibir durante un periodo dado. La radiación ionizante comprende los rayos ultravioletas (efecto bronceado y de golpe de sol), los rayos X (radioscopia) y los rayos γ (materiales radiactivos, centrales nucleares) como se muestra en la Fig. 20.

A frecuencias más bajas, para las visibles, los infrarrojos, y todas las frecuencias utilizadas en comunicaciones (ver Fig. 20), un fotón aislado no tiene suficiente energía para ionizar un átomo y modificar un enlace químico. Esta radiación se dice no ionizante. La interacción es entonces debida al efecto combinado de un gran número de fotones de pequeña energía, fenómeno que se explica mejor en términos de la forma ondulatoria de la radiación.

Estos campos pueden producir bien un calentamiento o bien la aparición de potenciales sobre las membranas de las células y la emigración de iones. Estos efectos pueden ser

destructores: Sin embargo, es necesario para ello que la densidad de potencia supere un cierto umbral. Por debajo de este umbral, el efecto es generalmente no acumulativo.

La distinción entre radiación ionizante y no-ionizante es esencial: Los mecanismos de las interacciones son diferentes. Resultando que las precauciones a tomar dependen del tipo de radiación, es decir, de su frecuencia.

Cuando se habla, en general, de radiación, se piensa en una radiación ionizante (rayos UV, X, γ – gamma) que es la más peligrosa. Quizás esto conlleva a ciertas confusiones.